Föreläsning 7, SF1628 Komplex Analys. LB sid 203-221

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

12 september 2017
KTH

Cauchys integralformel

Vi drar oss till minnes:

DEFORMATIONSSATSEN

Om Γ_0, Γ_1 är homotopa i området D, och $f : D \to \mathbb{C}$ är analytisk, så gäller att

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

Vi kommer nu till ett huvudresultat:

CAUCHYS INTEGRALFORMEL

Låt Γ vara en positivt orienterad sluten kurva i ett enkelt sammanhängande område D. Om f är analytisk på D, och $z_0 \in D$ ligger innanför Γ, så gäller att

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Bevis av Cauchys integralformel

Enligt deformationssatsen kan vi byta ut Γ mot cirkeln γ_ϵ som ges av $|z - z_0| = \epsilon$ om ϵ är så litet att cirkeln blir innesluten i D:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Vi skriver nu

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)}{z - z_0}.$$

och vi vet att

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

ML-uppskattningen ger att

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi M_\epsilon \to 0$$

då $\epsilon \to 0$, där M_ϵ är maximum av $|f(z) - f(z_0)|$ på γ_ϵ.

Exempel på kurvintegraler

EXEMPEL

Beräkna

$$\int_\Gamma \frac{e^z + \sin z}{z}\, dz,$$

där Γ är cirkeln $|z-2| = 3$ moturs.

EXEMPEL

Beräkna

$$\int_\Gamma \frac{z^2 e^z}{2z+i}\, dz,$$

där Γ är cirkeln $|z| = 1$ medurs.

Formler för derivatan mm

Vi kan derivera inuti Cauchys integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

där Γ omsluter z i positiv led. Vi får då att

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Ytterligare deriveringar ger den mer allmänna formeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

SATS

Om f är analytisk i D är även derivatorna $f', f'', \ldots$ alla analytiska i D.

Elliptisk regularitet, Moreras sats

SATS

Om u är harmonisk är u C^∞-glatt.

Beviset följer ur att det finns ett harmoniskt konjugat v så att $f = u + iv$ blir analytisk, och f har kontinuerliga komplexa derivator av alla ordningar.

MORERAS SATS

Om f är kontinuerlig i D och om

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

för alla slutna kurvor Γ i D så är f analytisk i D.

Enligt tidigare sats har enligt förutsättningen f en primitiv funktion F vars komplexa derivata ges av f. Då är F analytisk och därför är även $f = F'$ analytisk.

Cauchys uppskattningar och Liouvilles sats

CAUCHYS UPPSKATTNINGAR

Antag f är analytisk innanför cirkeln $C_R : |z - z_0| = R$. Om $|f(z)| \leq M$ på C_R så gäller att

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

LIOUVILLES SATS

Antag f är hel och begänsad. Då är f konstant.

Bevis

Tillämpa Cauchys uppskattningar för $n = 1$ och låt $R \to +\infty$.

Algebrans fundamentalsats och medelvärdesegenskapen

ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS

Antag p är ett polynom av grad ≥ 1. Då har p minst en rot.

Bevis

Om p saknar nollställen blir $1/p$ en hel och begränsad funktion. Detta leder till att $1/p$ enligt Liouville blir konstant, vilket är absurt.

MEDELVÄRDESEGENSKAPEN

Antag f är analytisk innanför cirkeln $|z - z_0| = R$. Då har vi att

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})dt.$$

Högersidan motsvarar medelvärdet av f på cirkeln, härav namnet. Genom att ta real och imaginärdelar gäller satsen även för harmoniska funktioner.

MAXIMUMPRINCIPEN

Maximumprincipen I

Antag f är analytisk i D och att $|f|$ har maximum i en inre punkt z_0. Då är f konstant.

Maximumprincipen II

Antag f är analytisk i ett begränsat område D, samt kontinuerlig upp till randen. Då antar $|f|$ sitt maximum på randen.