Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Lösningsförslag för omtentamen i Komplex analys, SF1628, 21/12 2016

Skrivtid 08.00-13.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller betygsreglerna från kurshemsidan. Det behövs minst 14 poäng för betyg E. 12-13 poäng ger betyg FX, med rätt till komplettering. Bonuspoäng tillgodoräknas enligt kurshemsidan: KS1 motsvarar uppgift 1, och KS2 motsvarar uppgift 2. Inlupparna motsvarar uppgifterna 3 och 4.

Del **B** skall göras för studenter som önskar betygen A, B, och C. Observera betyg C även kan uppnås genom bra resultat på del A. För detaljer, se kurshemsidan.

Lycka till!

Del A.

1. Använd definitionen av funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ för att visa att trigonometriska ettan

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

gäller för alla komplexa z.

Eftersom $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ och $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ så har vi ju att

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \frac{1}{(2i)^2}(e^{iz} - e^{-iz})^2 + \frac{1}{2^2}(e^{iz} + e^{-iz})^2 \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1.\end{aligned}$$

---

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$$

i Laurentserie i "ringområdet" $0 < |z + 3i| < 6$.

Partialbråksuppdelning ger att

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{i}{6}\left(\frac{1}{z+3i} - \frac{1}{z-3i}\right)$$

och första termen på höger sida har redan rätt form. Om vi skriver $\zeta = z + 3i$ gäller för den andra termen att

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{\zeta - 6i} = \frac{i}{6(1-\frac{\zeta}{6i})} = \frac{i}{6}\left(1 + \frac{\zeta}{6i} + \left(\frac{\zeta}{6i}\right)^2 + \dots\right)$$

förutsatt att $|\zeta| < 6$, vilket motsvarar $|z+3i| < 6$. Vi får alltså att

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9} = \frac{i}{6}\,(z+3i)^{-1} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36\cdot 6i}(z+3i) + \frac{1}{36(6i)^2}(z+3i)^2 + \dots$$

blir Laurentserien i ringområdet $0 < |z+3i| < 6$.

---

3. Hur många nollställen har polynomet

$$f(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 5$$

i cirkelskivan $|z| < 1$?

Om $|z| < 1$ så gäller enligt triangelolikheten att

$$|f(z)| = |z^4 - z^3 + z^2 - z + 5| > 5 - 1 - 1 - 1 - 1 = 1$$

vilket betyder att polynomet saknar nollställen i den angivna cirkelskivan.

---

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x}$$

med hjälp av residukalkyl.

Om vi inför $\zeta = e^{ix}$ så gäller att $\sin x = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta^{-1})$ och $dx = d\zeta/(i\zeta)$. Vi stoppar in detta i integralen och finner att vår integral kan skrivas på formen (Γ=enhetscirkeln i positiv led)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x} = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta(2 - \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta^{-1}))} = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2i\zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)}.$$

Nollställen till nämnaren, $2i\zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1) = 0$ blir $\zeta = i(2 \pm \sqrt{3})$. Ett av dessa ligger innanför Γ, nämligen $i(2-\sqrt{3})$. Eftersom

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{2i\zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2-1)} = -2\int_\Gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - i(2+\sqrt{3}))(\zeta - i(2-\sqrt{3}))}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

enligt t ex Cauchys integralformel (eller residusatsen).

---

5. Finn en Möbiusavbildning som avbildar halvplanet $\operatorname{Re} z > 1$ på cirkelskivan $|z| < 1$.

En sådan Möbiusavbildning ges av t ex $w = \frac{2}{z} - 1$. Då motsvarar $\operatorname{Re} z > 1$ att $|w| < 1$.

Del B.

6. Betrakta integralen

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx,$$

där a är ett reellt tal. Visa att $I(a)$ inte beror på a, så att $I(a) = I(0)$, där man av vissa skäl råkar veta att $I(0) = \sqrt{\pi}$. Tips: Betrakta $I(a)$ som en integral av e^{-z^2} längs med en horisontell linje.

Vi kan tänka på integralen som att

$$I(a) = \int_{\Gamma(a)} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

där $\Gamma(a)$ är den räta linjen $\operatorname{Im}\zeta = a$ riktad åt höger. Vi kan se $I(a)$ som ett gränsvärde av $I(a,R)$ där $R \to +\infty$, där

$$I(a,R) = \int_{\Gamma(a,R)} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

och $\Gamma(a,R)$ är den del av $\Gamma(a)$ där $-R < \operatorname{Re}\zeta < R$. Vi tar två olika värden på a, säg a_1 och a_2, där vi antar att $a_1 < a_2$. Vi kan bilda en sluten kurva av $\Gamma(a_1,R) - \Gamma(a_2,R)$ om vi lägger på två vertikala segment, $\Gamma_1(R)$ med $\operatorname{Re}\zeta = R$ och $a_1 < \operatorname{Im}\zeta < a_2$ i uppåtriktning, och $\Gamma_2(R)$ med $\operatorname{Re}\zeta = -R$ och $a_1 < \operatorname{Im}\zeta < a_2$ i nedåtriktning. Enligt Cauchys sats gäller nu att

$$0 = \int_{\Gamma(a_1,R)-\Gamma(a_2,R)+\Gamma_1(R)+\Gamma_2(R)} e^{-\zeta^2} d\zeta = I(a_1,R) - I(a_2,R) + \int_{\Gamma_1(R)+\Gamma_2(R)} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Det återstår att uppskatta $e^{-\zeta^2}$ längs med $\Gamma_1(R)$ och $\Gamma_2(R)$. Vi ser att om $\zeta = +xi + i\eta$ så är

$$|e^{-\zeta^2}| = e^{-\xi^2+\eta^2},$$

så att om $a_1 < \xi < a_2$ så kommer

$$|e^{-\zeta^2}| = e^{-\xi^2+\eta^2} \leq e^{\max(|a_1|,|a_2|)} e^{-\xi^2}$$

och vi finner att

$$\left| \int_{\Gamma_1(R)+\Gamma_2(R)} e^{-\zeta^2} d\zeta \right| \leq 2(a_2 - a_1)\, e^{\max(|a_1|,|a_2|)} e^{-R^2} \to 0$$

då $R \to +\infty$. Det följer att $I(a_1,R) - I(a_2,R) \to 0$ as $R \to +\infty$, och följaktligen har vi att $I(a_1) = I(a_2)$.

---

7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

Se läroboken.

---

8. Antag att $f(z)$ är en hel funktion (dvs analytisk i hela planet), och att funktionen uppfyller olikheten

$$|f(z)| \leq |z|^{1/2}$$

överallt. Visa att i så fall måste vi ha att $f(z) = 0$ för alla z.

Enligt Cauchy-uppskattningarna gäller att

$$|f'(w)| \leq \frac{2\pi}{R} \max_{|z-w|=R} |f(z)| \leq \frac{2\pi}{R}(|w| + R)^{1/2},$$

och eftersom höger led går mot 0 då $R \to +\infty$ för varje fixerat w måste vi ha att $f'(w) = 0$. Eftersom detta ska gälla för varje w måste f vara konstant, $f(z) = C$. Den enda konstant som uppfyller $|C| = |f(z)| \leq |z|^{1/2}$ är förstås $C = 0$ (stoppa in punkten $z = 0$!). Därför är $f(z) = 0$ överallt.

9. Formulera och bevisa maximumprincipen för analytiska funktioner.

Se läroboken.