Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 21 oktober 2016

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Den som är godkänd på kontrollskrivning 1 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 1 nedan. Den som är godkänd på kontrollskrivning 2 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 2 nedan. Den som är godkänd på inlämningsuppgifterna med minst 10 poäng ska ej lösa upgifterna 3 och 4 nedan utan får 5 poäng på vardera automatiskt.

För del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt följande:

Tre eller fler rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg A.
Två rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg B.
En rätt löst uppgift på del B ger säkert betyg C.
Om mindre än en uppgift lösts rätt kvarstår betyget D.

Kontrollera bonuslistan hos skrivningsvakten.
Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z så att $\sin z = 3$.

Ekvationen skrivs som

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$$

och med $w = e^{iz}$ blir ekvationen $w + w^{-1} = 6i$ vilken ekvation blir en andragradare efter multiplikation med w: $w^2 - 6iw - 1 = 0$. Kvadrakomplettering: $(w - 3i)^2 = -8$ med rötter $w = i(3 \pm 2\sqrt{2})$. Slutligen löser vi ekvationen $e^{iz} = i(3 \pm 2\sqrt{2})$ med logaritmering:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\ln(3 + 2\sqrt{2}),$$

där n är ett heltal ger alla rötter till ekvationen.

---

2. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) =$ Re f(z) och $v(z) =$ Im f(z) på Ω. Visa att funktionen

$$h(z) = u(z)v(z)$$

är harmonisk i Ω.

Vi bildar kvadraten av funktionen f: $f^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$. Eftersom f är analytisk är dess kvadrat f^2 också analytisk, och imaginärdelen till en analytisk funktion är harmonisk. Därför är $2uv$ harmonisk och även uv är harmonisk.

---

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring $z = 0$. Det finns tre möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden och de tre serierna.

Konvergensområdena är ringar med centrum i $z = 0$. Funktionens singulariteter avgör vilka ringar det blir. I detta fall har vi poler i $z = 0$, $z = -1$, och $z = -2$. Detta ger ringarna $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, och $2 < |z| < +\infty$. Nu återstår att beräkna Laurentserierna i de tre ringarna.

Partialbråksuppdelning ger:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2(z+2)}.$$

Det första uttrycket, $\frac{1}{2z} = \frac{1}{2}z^{-1}$, har redan rätt form. Nu har vi att

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \qquad \text{för} \quad |z| < 1,$$

och

$$\frac{1}{z+1} = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - \dots, \qquad \text{för} \quad |z| > 1.$$

Analogt gäller att

$$\frac{1}{2(z+2)} = \frac{1}{4(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots\right), \qquad \text{för} \quad |z| < 2,$$

och

$$\frac{1}{2(z+2)} = \frac{z^{-1}}{2(1+2z^{-1})} = \frac{1}{2}\left(z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-3} - \dots\right), \qquad \text{för} \quad |z| > 2.$$

Genom att lägga ihop dessa uttryck i de respektiva ringarna får vi Laurentutvecklingarna av $f(z)$.

---

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+6}\, dx.$$

Man betraktar integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+6}\, dx$$

vars realdel blir den sökta integralen. Observera att i komplexa planet avtar e^{ix} snabbt i övre halvplanet med positiv imaginärdel. Vi vet att vi kan se ovanstående som gränsvärdet av $\int_{-R}^{R}$ där $R \to +\infty$, och eftersom vi delar med ett polynomiellt uttryck av grad ≥ 1 så kan integralen fås med residukalkyl. Residun blir i roten till $z^2+4z+6=0$ i övre halvplanet, som är $z = -2+i\sqrt{2}$. Eftersom $z^2+4z+6 = (z+2+i\sqrt{2})(z+2-i\sqrt{2})$ får vi att residun blir

$$\mathrm{Res}_{z=-2+i\sqrt{2}} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+6} = \left.\frac{e^{iz}}{z+2+i\sqrt{2}}\right|_{z=-2+i\sqrt{2}} = \frac{e^{-2i-\sqrt{2}}}{i2\sqrt{2}},$$

och multiplicerar vi med $i2\pi$ får vi integralens värde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+6}\, dx = \frac{\pi\, e^{-2i-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Realdelen ger sedan den sökta integralen.

---

5. Finn en konform avbildning $w = f(z)$ som avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$ sådan att $f(0) = \frac{1}{2}$.

En sådan avbildning är Möbiusavbildningen

$$w = f(z) = \frac{\frac{1}{2} + z}{1 + \frac{1}{2}z}.$$

Del B.

6. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som satisfierar olikheten

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^2}{1 + |z|}$$

för alla komplexa z. Vi minns här att en funktion sägs vara *hel* om den är analytisk i hela komplexa talplanet.

Olikheten ger att f kan ha nollställe enbart i $z = 0$. Vi faktoriserar $f(z) = z^n g(z)$, där $n \geq 0$ är ett heltal och g är en hel funktion utan nollställen. Då är $h = 1/g$ också hel och vi ser att

$$|h(z)| = \left|\frac{1}{g(z)}\right| = \left|\frac{z^n}{f(z)}\right| = \frac{|z|^n}{|f(z)|} \leq |z|^n \frac{1 + |z|}{|z|^2} = |z|^{n-2}(1 + |z|).$$

Detta ger att h växer högst polynomiellt (av grad $\leq n - 1$), och av Cauchy-uppskattningarna ser vi att h måste vara ett polynom (derivatan $h^{(n)} = 0$). Nu måste ett polynom ha nollställen om graden är ≥ 1, så därför måste h vara konstant. Nu ser vi alltså att $f(z) = Cz^n$ för en konstant $C \neq 0$. Vi stoppar in i den givna olikheten:

$$|Cz^n| \geq \frac{|z|^2}{1 + |z|}.$$

Detta kan inte gälla om $n > 2$ eftersom vänster sida växer fortare än höger sida i detta fall. Det återstår att betrakta $n = 0$, $n = 1$, och $n = 2$. Om $n = 0$ kan inte olikheten gälla efter vänster sida inte växer medan höger sida gör det. Om $n = 1$ skriver vi om olikheten:

$$|C| \geq \frac{|z|}{1 + |z|}.$$

Höger sida blir störst då $|z| \to +\infty$, så villkoret blir $|C| \geq 1$. Om istället $n = 2$ så säger oliketen att

$$|C| \geq \frac{1}{1 + |z|}.$$

Höger sida maximeras för $z = 0$, och villkoret är alltjämt $|C| \geq 1$.

SVAR: $f(z) = Cz^n$, där $|C| \geq 1$ och n är lika med 1 eller 2.

7. Formulera och bevisa residusatsen.

Se läroboken.

8. Hur många rötter har ekvationen $z^5 + 10z - 1 = 0$ för $1 < |z| < 2$?

Vi skriver $z^5 + 10z - 1 = f(z) + h(z)$, där $f(z) = z^5 - 10z$ och $h(z) = -1$. Nu gäller $h(z)| = 1$ överallt, medan

$$|f(z)| = |z^5 - 10z| = |10z - z^5| \geq 10|z| - |z|^5 = 9$$

på cirkeln $|z| = 1$, och

$$|f(z)| = |z^5 - 10z| \geq |z|^5 - \geq 10|z| = 32 - 20 = 12$$

på cirkeln $|z| = 2$. Därför gäller att $|h(z)| < |f(z)|$ på de två cirklarna, och därför gäller enligt Rouchés sats att $f(z)$ och $f(z) + h(z)$ har lika många nollställen i ringområdet. Eftersom $f(z)$ har fyra nollställen i ringen så har alltså $z^5 + 10z - 1 = f(z) + h(z)$ också fyra nollställen där.

9. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling för en funktion som är analytisk i en öppen cirkelskiva.

Se läroboken.