Föreläsning 9, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

16 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 13.2: 3, 5, 9, 15. 13.3: 3, 9, 11, 15.
13.4: 1, 3.

Extremvärdet på avgränsade områden

EXEMPEL

Finn max och min av $f(x, y) = 2xy$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$.

EXEMPEL

Finn extremvärdena till $f(x, y) = x^2 y\, e^{-x-y}$ på mängden T, som ges av villkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$, och $x + y \leq 4$.

Lagrange-multiplikatorer

Ofta behöver vi optimera under bivillkor. Om bivillkoret kan skrivas på formen $g(x, y) = 0$, vilket vanligen uttrycker en kurva i planet, och funktionen som ska optimeras är $f(x, y)$, så bildar vi uttrycket

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).$$

SATS

Antag att $f(x, y)$ och $g(x, y)$ är båda C^1-glatta, och kalla kurvan som ges av villkoret $g(x, y) = 0$ för $\mathcal{C}$. Antag att $f(x, y)$ har ett lokalt max eller min på $\mathcal{C}$ i punkten $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. Antag nu att

(i) punkten (x_0, y_0) är inte en ändpunkt till $\mathcal{C}$, samt

(ii) $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Då finns ett tal λ_0 så att punkten (x_0, y_0, λ_0) är en *kritisk punkt* till funktionen $L(x, y, \lambda)$.

Lagrange-multiplikatorer: kommentarer

Kommentar

Villkoret att punkten (x_0, y_0, λ_0) är kritisk betyder att där skall följande gälla:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Dessa villkor uttrycker följande:

(a) bivillkoret $g(x_0, y_0) = 0$, samt

(b) att ∇f och ∇g ska vara parallella i (x_0, y_0).

Lagrange-multiplikatorer: exempel

EXEMPEL

Finn kortaste avståndet mellan origo och kurvan $x^2y = 16$.

EXEMPEL

Studera problemet att minimera y givet bivillkoret $y^3 - x^2 = 0$.
Analysera vad som blir problematiskt!

EXEMPEL

Beräkna max och min av uttrycket xy^2z^3 givet att $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Lagrange med två bivillkor

Antag nu att vi ska maximera eller minimera $f(x, y, z)$ givet två bivillkor:

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0, \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Hur fungerar Lagrange-multiplikatorerna i detta fall? Jo, vi bildar

$$L(x, y, \lambda, \mu) = f(x, y) + \lambda g(x, y) + \mu h(x, y),$$

och letar efter kritiska punkter!

EXEMPEL

Beräkna max och min av uttrycket $xy + 2z$ givet att

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 24. \end{cases}$$