Föreläsning 8, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

14 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 12.9: 1, 3, 5, 7, 11. 13.1: 5, 7, 9, 19, 23, 25.

Taylors formel i en dimension

Taylors formel i en variabel säger att om vi utvecklar en funktion $F(x)$ kring $x = 0$ så får vi att

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{x^m}{m!}F^{(m)}(0) + R_m(x)$$

där $R_m(x)$ är den så kallade *resttermen*. Formeln som den är skriven kräver bara att ovanstående derivator av F finns och den säger inte särskilt mycket om vi inte kan kontrollera resttermen. Antag nu att funktionen $F(x)$ är C^{m+1}-glatt, dvs att alla derivator av ordning $\leq m + 1$ är kontinuerliga. I så fall är resttermen verkligen liten nära $x = 0$. T ex har vi Lagrange-formen på resttermen:

$$R_m(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}F^{(m)}(\theta x)$$

för någon punkt θ med $0 < \theta < 1$. Obs! θ beror i allmänhet på punkten x.

Taylors formel i två dimensioner

Men hur blir det om vi har en funktion $f(x, y)$ och vill utveckla den kring $(x, y) = (0, 0)$? En idé kan vara att utveckla med Taylors formel i x först och därefter i y. Den metoden fungerar i princip men det blir krångligt.

Taylors formel kring origo

Vi har att

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) &+ xf'_x(0,0) + yf'_y(0,0) \\ &+ \frac{x^2y^0}{2!0!}f''_{xx}(0,0) + \frac{xy}{1!1!}f''_{xy}(0,0) + \frac{x^0y^2}{0!2!}f''_{yy}(0,0) + \cdots \\ &+ \frac{x^my^0}{m!0!}f^{(m)}_{x^m}(0,0) + \frac{x^{m-1}y^1}{(m-1)!1!}f^{(m)}_{x^{m-1}y}(0,0) + \cdots \\ &+ \frac{x^0y^m}{0!m!}f^{(m)}_{y^m}(0,0) + R_m(x,y), \end{aligned}$$

där $R_m(x, y)$ är resttermen.

Taylors formel i två dimensioner (2)

Vi behöver säga något om resttermen $R_m(x, y)$. Om $f(x, y)$ är C^{m+1}-glatt kan vi t ex säga att

$$|R_m(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)^{(m+1)/2},$$

om (x, y) ligger nära $(0, 0)$. Kanske ännu bättre är att förstå varifrån vi kan få fram Taylors formel, vilket ger en bättre uppfattning om resttermen förhoppningsvis.

Taylors formel kring annan punkt

Vi kan lätt byta till en annan punkt (a, b) genom s k translatering. Om vi vill utveckla $f(x, y)$ kring (a, b) kan vi betrakta funktionen $g(h, k) = f(a + h, b + k)$ och utveckla denna funktion kring $(h, k) = (0, 0)$.

Taylors formel i två dimensioner: varifrån?

Vi kan byta till generell punkt (a, b) och betrakta envariabelsfunktionen

$$F(t) = f(a + th, b + tk)$$

genom att betrakta a, b, h, k som fixerade. Enligt Taylors formel i envariabelsfallet blir nu (stoppa in värdet $t = 1$)

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + R_m(1). \qquad (1)$$

Enligt Lagrange är resttermen

$$R_m(1) = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!},$$

för något θ med $0 < \theta < 1$. Men vad innebär denna formel för utvecklingen av funktionen f?

Taylors formel i två dimensioner: forts

Vi observerar att $F(0) = f(a, b)$. Men vad blir $F'(0)$? Enligt kedjeregeln blir nu

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk)\frac{d(a + th)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk)\frac{d(b + tk)}{dt}$$

vilket förenklas till

$$F'(t) = h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk).$$

Om vi inför beteckningen

$$(h, k) \cdot \nabla = h\,\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y}$$

för en första ordningens differentialoperator så blir

$$F'(0) = (h, k) \cdot \nabla f(a, b).$$

Taylors formel i två dimensioner: forts (2)

Men vi kan också räkna ut andraderivatan:

$$F''(0) = [(h, k) \cdot \nabla]^2 f(a, b).$$

Analogt mer generellt

$$F^{(m)}(0) = [(h, k) \cdot \nabla]^m f(a, b). \tag{2}$$

Här är t ex

$$[(h, k) \cdot \nabla]^2 = \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right]^2 = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

som vanlig kvadrering fast med differentialoperatorer.

Taylors formel i två dimensioner: forts (3)

Enligt (1) tillsammans med (2), får vi, eftersom $F(0) = f(a, b)$ och $F(1) = f(a + h, b + k)$, att

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a, b) + [(h, k) \cdot \nabla] f(a, b) + \\ \cdots + \frac{1}{m!}[(h, k) \cdot \nabla]^m f(a, b) + R_m(1), \quad (3) \end{aligned}$$

där resttermen blir

$$R_m(1) = \frac{1}{(m+1)!}[(h, k) \cdot \nabla]^{m+1} f(a + h\theta, b + k\theta)$$

för något θ med $0 < \theta < 1$. Den allmänna formeln för potenserna av $(h, k) \cdot \nabla$ är

$$\begin{aligned} [(h, k) \cdot \nabla]^n = \binom{n}{0} h^n k^0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k^1 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} + \\ \cdots + \binom{n}{n} h^0 k^n \frac{\partial^n}{\partial y^n}. \end{aligned}$$

Taylors formel: kommentar och exempel

Kommentar

I Taylors formel får vi koefficienten

$$\frac{1}{n!}\binom{n}{s} = \frac{1}{(n-s)!s!}$$

framför termen med potensen $h^s k^{n-s}$. Detta stämmer överens med tidigare formulering av Taylors formel för $(a,b) = (0,0)$!

EXEMPEL

Finn bästa andragradspolynomet som approximerar $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ runt punkten $(1,2)$, och använd detta polynom för att approximera $f(1.02, 1.97) = \sqrt{1.02^2 + 1.97^3}$. Obs! Taylorpolynomet kan fås på flera vis!

Taylors formel: exempel med implicita funktioner

EXEMPEL

Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 runt $(0,0)$ för $f(x,y) = e^{x-2y}$.

EXEMPEL (implicit funktion)

Ekvationen $\sin(x+y) = xy + 2x$ har en lokal lösning $y = f(x)$ med $f(0) = 0$. Finns Taylorpolynomet till funktionen $f(x)$ upp till grad 4 i potenser av x.

Extremvärden

DEFINITION

Extremvärde = max eller min.

SATS

En funktion $f(x, y)$ kan ha ett lokalt eller globalt extremvärde i en punkt (a, b) enbart om något av följande gäller:

(i) Punkten (a, b) är kritisk, dvs $\nabla f(a, b) = 0$

(ii) Punkten (a, b) är singulär, dvs $\nabla f(a, b)$ finns ej,

(iii) Punkten (a, b) är en randpunkt.

EXISTENSSATSEN FÖR MAX/MIN

Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig på en kompakt mängd. Då antar funktionen sitt max och min.

Extremvärden och andraderivator

Observera:

kompakt = sluten och begränsad.

HESSIANEN

Hessianen är matrisen

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Positivt (semi)definit

En symmetrisk matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

där symmetrin innebär att $a_{12} = a_{21}$ är positivt definit om alla egenvärden är positiva, och positivt semidefinit om egenvärdena är alla ≥ 0. Den är indefinit om den har både positiva och negativa egenvärden.

Extremvärden och andraderivator (2)

Negativt (semi)definit definieras analogt.

SATS

Antag att funktionen $f(x, y)$ är C^2-glatt nära punkten (a, b), så att Hessianen $\mathbf{H}_f(x, y)$ blir kontinuerlig där. Om nu (a, b) är en inre punkt till definitionsmängden, och därtill en kritisk punkt, dvs $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, så gäller följande:

(i) Om $\mathbf{H}_f(a, b)$ är positivt definit så har f ett lokalt minimum i (a, b).

(ii) Om $\mathbf{H}_f(a, b)$ är negativt definit så har f ett lokalt maximum i (a, b).

(iii) Om $\mathbf{H}_f(a, b)$ är indefinit så har f en sadelpunkt i (a, b).

ANMÄRKNING

Om Hessianen varken är positivt eller negativt definit, eller indefinit, så ger kriteriet ingenting!

Extremvärden och andraderivator. Exempel

OBS!

Motsvarande kriterium finns i fler variabler än två också.

EXEMPEL

Finn och klassificera de kritiska punkterna till
$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$.

EXEMPEL

Finn och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$.