Föreläsning 7, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

13 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 12.8: 13, 17

Enhetscirkeln och implicita funktioner

Ibland kan en funktion ges implicit. Vad det innebär förstås bäst med exempel. Om vi t ex tittar på ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

så vet vi ju att detta beskriver enhetscirkeln i planet. Men vi kan tänka på det som att det blir grafen till en funktion. Fast det funkar inte alltid! Om vi försöker lösa ut y som en funktion av x finner vi att

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

vilket strikt talat är två funktioner på samma gång. Vi kan förstås välja en av dessa, ex vis

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

och får då en funktion som blir definierad för $-1 \leq x \leq 1$. Derivatan till denna funktion kan beräknas förstås:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}. \tag{2}$$

Den sista likheten är en extra observation. Kan likheten i (2) utan mellanledet inses direkt ur (1)?

Enhetscirkeln och implicita funktioner (2)

Vi provar nu om vi kan se direkt ur (1) att

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3}$$

gäller. Vi tar differentialerna helt enkelt av vänster och höger led i (1) som då måste vara lika längs med kurvan:

$$d(x^2 + y^2) = d1 = 0 \tag{4}$$

Enligt standarmetoder (kedjeregeln t ex) är nu

$$d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy, \tag{5}$$

så (4) säger att

$$2xdx + 2ydy = 0$$

varur vi löser ut dy/dx och får fram (3). Vad vi gjorde i (4) och (5) är att vi klarade av att derivera beräkna derivatan dy/dx *utan att först lösa ut y som funktion av x*. Detta kallas för *implicit derivering*.

Implicit derivering

Vi tittar nu på en allmän ekvation

$$F(x, y) = 0. \tag{6}$$

Här kan vi som i cirkelfallet tänka oss att y blir en funktion av x, åtminstone lokalt. Observera att i cirkelfallet fick vi problem med division med noll i (3) om $y = 0$, och det beror på att tangenten blir vertikal där. Något liknande kan förstås också inträffa i det generella fallet (6). Vi provar på samma vis med differentialer. Eftersom enligt kedjeregeln

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

så följer ur (6) att

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \tag{7}$$

längs med lösningskurvan till ekvationen (6). Om vi nu möblerar om lite i (7) så får vi följande:

IMPLICIT DERIVERING

Vi har att derivatan blir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Kommentarer: implicit derivering

- Vi får inte dela med noll, så vi behöver anta att $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

- Är allt rigoröst? Kan vi vara säkra på att lösningskurvan lokalt ser ut som en graf $y = y(x)$?

Implicita funktionssatsen

IMPLICITA FUNKTIONSSATSEN

Antag att $F(x, y)$ är C^1-glatt kring punkten (a, b), och att $F(a, b) = 0$ medan $F'_y(a, b) \neq 0$. Då definierar ekvationen $F(x, y) = 0$ lokalt en C^1-glatt funktion $y = f(x)$ med $f(a) = b$ och dess derivata ges av implicita deriveringsformeln

$$y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x(x, y(x))}{\partial F/\partial y(x, y(x))}$$

Vi har även att derivatan ges av

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Högre dimensioner

Implicit derivering och implicita funktionssatsen fungerar även i hğre dimensioner än 2, men då kan vi förstås bara räkna ut partiella derivator av den implicit givna funktionen. I tre dimensioner blir ekvationen t ex

$$F(x, y, z) = 0$$

och vi kan försöka lösa ut (i tanken) $z = z(x, y)$. Därefter kan vi beräkna $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$.

EXEMPEL

Gör detta för $x^2 + y^2 + z^2$, dvs räkna ut $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$.

Svårare: system av ekvationer

Ett system av två ekvationer i fyra variabler kan skrivas på formen

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Här föreställer vi (från t ex linjär algebra) att vi kan lösa ut (x, y) som funktioner av (u, v), eller omvänt, så att

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \iff \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Vi kan sedan t ex fråga oss hur man kan beräkna partiella derivator som $\partial u/\partial x$ och $\partial v/\partial y$. Detta går också att göra med samma metoder som vi jobbat med innan, bara slitigare...

Exempel: system av ekvationer

EXEMPEL

Antag att

$$\begin{cases} u = x^2 + xy - y^2, \\ v = 2xy + y^2. \end{cases}$$

Beräkna nu in punkten $(x, y) = (2, -1)$:

(a) $(\partial x/\partial u)_v$ där alltså v hålls konstant.

(a) $(\partial x/\partial u)_y$ där alltså y hålls konstant.

Jakobianen

Vid ett variabelbyte

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \iff \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

är det intressant att förstå lokala egenskaper hos transformationen.

JAKOBIANEN

Jakobianen är determinanten

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Men man kan förstås även betrakta det omvända variabelbytet och beräkna motsvarande Jakobian.

Jakobianen för omvända variabelbytet

Om

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

är Jakobianen för det omvända variabelbytet så har vi följande samband.

SATS

Vi har att

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

Jakobianen och arealementet

Ett sätt att första att satsen gäller är att tolka Jakobianen som ett uttryck som säger hur areaelementet ändras under variabelbyte. Man skriver $dudv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy$.