Föreläsning 5, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

8 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 12.5: 7, 11, 17, 21. 12.6: 3, 5, 17, 19.

Kedjeregeln i en variabel

I en variabel säger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}\big(f(u(x))\big) = f'(u(x))\,u'(x).$$

Faktorn till höger minns vi kallas *inre derivatan*. Det blir lättare att förstå kedjeregeln om vi tänker på u som en variabel som förändras (och inte primärt som en funktion). Då kan vi se att kedregeln säger att

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Vi tänker på den som att vi får förkorta i ovanstående "bråk".

Kedjeregeln i två variabler

Hur blir det i två variabler då?? Vi har nu en funktion $f(u, v)$ som alltså beror av två variabler u och v. Hur ska vi tänka?

Vi minns tangentplanets ekvation

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b),$$

och vi tänker på formeln med approximation av funktionen med tangentplanet som att

$$\Delta f = f(x, y) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y,$$

där $\Delta x = x - a$ och $\Delta y = y - b$. Den här approximationen blir bättre och bättre ju mindre Δx och Δy blir, åtminstone om funktionen är vettig.

Kedjeregeln i två variabler: differentialform

Vi tänker nu intuitivt att vi går i gräns då Δx och Δy går mot noll, men vi jobbar med en sorts "infinitesimaler" och ersätter Δf med df, och Δx och Δy med dx och dy, respektive. Vi får:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Uttrycken df, dx, dy kallas för *differentialer*. Ovanstående formel är kedjeregeln på differentialform.

Kedjeregeln i två variabler: envariabelsfallet

Låt nu $x = x(t)$ och $y = y(t)$, som parametriserar en kurva i planet. Funktionen

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

beror då bara på en variabel och vi ska kunna derivera den. Längs med kurvan är ju f och F samma, så vi kan tänka på dF som df där. Men i kedjeregeln

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

behöver vi stoppa in vad dx och dy blir. Enligt kedjeregeln i en variabel är $dx = x'(t)dt$ och $dy = y'(t)dt$, och därför

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)dt.$$

Vi delar bägge sidor med dt och ser att

$$F'(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t). \tag{1}$$

Detta är en version av kedjeregeln.

Kedjeregeln i två variabler: två variabler

Låt nu istället $x = x(s,t)$ och $y = y(s,t)$, som motsvarar ett variabelbyte. Tänk t. ex. på polära koordinater.

$$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$$

beror nu på två variabler, så den kan vi bara derivera partiellt. Genom att hålla först t konstant och därefter s, kan vi använda formeln (1) på s och t respektive. Detta ger nu

$$F'_s(s,t) = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}. \tag{2}$$

samt

$$F'_t(s,t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{3}$$

Observera att partialderivatorn tas med avseende på de olika systemen (x,y) och (s,t).

KEDJEREGELN I FLER VARIABLER

Om $f(x_1, \ldots, x_n)$ alltså beror av n variabler, hur förstår vi kedjeregeln då? På differentialform är det analogt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Alla andra formler blir även de analoga, med n termer istället för bara två.

Exempel

EXEMPEL

Om $z = \sin(x^2 y)$, där $x = st^2$ och $y = s^2 + \frac{1}{t}$, finn $\partial z/\partial s$ och $\partial z/\partial t$, genom att

(a) använda kedjeregeln i en variabel,

(b) använda tvåvariabelsregeln.

EXEMPEL

Bestäm för en funktion $f(u, v)$ av två variabler

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x^2 y, x + 2y)\big) = ?, \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(f(x^2 y, x + 2y)\big) = ?.$$

Homogena funktioner

Homogen funktion av grad k

En funktion $f(x, y)$ är *homogen av grad* k om

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

gäller för alla $t > 0$ och alla (x, y) i planet.

EXEMPEL

(a) Funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är homogen av grad 1.
(b) Funktionen $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ är homogen av grad 2.

Eulers sats

Eulers sats

Antag att $f(x, y)$ är C^1-glatt och homogen av grad k. Då gäller att

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

EXEMPEL

Om $f(x, y)$ är harmonisk, dvs löser Laplaces ekvation, visa att även $F(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ är harmonisk.

Linjär approximation, differentierbarhet

Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler, och låt

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1'(a, b)(x - a) + f_2'(a, b)(y - b)$$

vara linjärapproximationen i punkten (a, b).

Differentierbarhet

Funktionen $f(x, y)$ sägs vara *differentierbar* i punkten (a, b) om

$$\frac{f(a + h, b + k) - L(a + h, b + k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

då $(h, k) \to (0, 0)$.

Differentierbarhet kräver att linjärapproximationen är en god approximation av funktionen kring (a, b).

En medelvärdessats

SATS

Antag att $f(x,y)$ och partialderivatorna $f_1' = \frac{\partial f}{\partial x}$ och $f_2' = \frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga kring (a,b). Då finns tal $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ så att

$$f(a+h, b+k) = hf_1'(a+\theta_1 h, b+k) + kf_2'(a, b+\theta_2 k).$$