Föreläsning 4, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

6 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 12.3: 5, 7, 13, 23. 12.4: 5, 7, 11, 15, 17.

Partiella derivator

Vi betraktar nu en funktion $f(x, y)$ som alltså beror av två variabler x och y. Vi vill kunna derivera funktionen, precis som vi gör i envariabelskursen. Men eftersom vi har två olika variabler, hur ska vi derivera egentligen? Enklast blir om vi betraktar variablerna separat. Dvs vid derivering tänker vi t. ex. på y som konstant och deriverar med avseende på x. Då får vi *partiella derivatan* $\partial f/\partial x$. På samma sätt, om vi håller x konstant, så kan vi derivera med avseende på y. Detta ger *partiella derivatan* $\partial f/\partial y$. En formell definition är som följer.

Partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.$$

Notation och exempel

Notation

Vi skriver även

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = f_x(x,y) = f'_1(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y) = f_y(x,y) = f'_2(x,y).$$

Motsvarande notation finns även om vi har tre variabler, t. ex. (x, y, z).

Exempel

Finn $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$ om $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$.

Exempel

Finn $f'_x(0,\pi)$ om $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.

Exempel

Om $f(t)$ är en C^1-glatt funktion av t, visa att $z = f(x/y)$ löser partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Tangentplan

Vi tänker på $z = f(x, y)$ som en yta i rummet. På samma vis som det i envariabelskursen är naturligt att approximera grafen med en tangentlinje är det här naturligt att försöka approximera med ett *tangentplan*. Hur kan vi hitta detta plan? Vi tittar på en punkt $(x, y) = (a, b)$ och vill hitta tangentplanet där.

Vi kommer ihåg följande från envariabelskursen.

Tangentriktning i en variabel

Om vi betraktar grafen $y = f(x)$ runt punkten $x = a$ så pekar vektorn $(1, f'(a))$ i tangentens riktning.

Detta leder till följande:

Tangentriktningar i två variabler

Enligt ovanstående blir det så att vektorerna

$$\mathbf{T}_1 = (1, 0, f'_x(a, b)), \quad \mathbf{T}_2 = (0, 1, f'_y(a, b)),$$

båda pekar i (olika) tangentriktningar.

Tangentplanets ekvation

Vi minns nu att alla plan i rummet kan skrivas på formen

$$Ax + By + Cz = D.$$

Men det kan vara bättre att tänka på ett plan som beskrivet av

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{1}$$

där $\mathbf{N}$ betecknar en normal till planet och $\mathbf{r}_0$ är en punkt i planet. RITA! I vår beskrivning av tangenplanet har vi nu två olika tangentialriktningar. Hur kan vi använda dessa för att få en normalriktning? Jo, vi kan bilda kryssprodukten $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1$ som måste vara en normal till planet! Beräkning ger nu att

$$\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = (0, 1, f_y'(a, b)) \times (1, 0, f_x'(a, b)) = (f_x'(a, b), f_y'(a, b), -1),$$

vilket är vår normal $\mathbf{N}$. Enligt (1) behöver vi även en punkt $\mathbf{r}_0$ i planet. Vi använder punkten $\mathbf{r}_0 = (a, b, f(a, b))$:

$$(f_x'(a, b), f_y'(a, b), -1) \cdot ((x, y, z) - (a, b, f(a, b))) = 0 \tag{2}$$

Tangentplanets ekvation (2)

Om vi skriver om (2) lite blir det:

Tangentplanets ekvation

$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$

Exempel

Bestäm normalvektor och tangentplanets ekvation för $z = \sin(xy)$ i punkten $(x, y) = (\pi/3, -1)$.

HÖGRE ORDNINGENS PARTIELLA DERIVATOR

Partiella derivator av andra ordningen

Vi skriver

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

samt

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ordningsföljden!

Observera att ordningsföljden blev omkastad i notationen med partiella derivator med ∂-tecken jämfört med prim-tecken! Det beror på att man låter ytterligare deriveringar synas från höger i prim-notation medan de syns från vänster i ∂-notation.

Tredje ordningen mm

Man kan även definiera partiella derivator av ännu högre ordning, t. ex. f'''_{xxy}.

Lite exempel

Observera

Observera att om vi tar f''_{xy} så deriverar vi först f med avseende på x medan vi håller y konstant. Därefter håller vi istället x konstant och deriverar med avseende på y.

EXEMPEL

Beräkna partiella tredjederivatorna f'''_{yyz}, f'''_{yzy}, samt f'''_{zyy} för funktionen $f(x, y, z) = e^{x-2y+3z}$.

Satsen om blandade derivator

SATS

Antag att $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion, och att även de partiella derivatorna f_x' och f_y' är kontinuerliga. Antag dessutom att de blandade partiella andraderivatorna f_{xy}'' och f_{yx}'' är kontinuerliga. Då är dessa lika, dvs $f_{xy}'' = f_{yx}''$. Med andra ord,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

DEFINITION

Vi säger att f är C^1-glatt om funktionen är kontinuerlig samt alla dess första ordningens partiella derivator är kontinuerliga. Analogt är f C^2-glatt om funktionen är kontinuerlig samt alla dess första och andra ordningens partiella derivator är kontinuerliga. Man pratar om C^3-glatthet om därtill alla tredje ordningens partiella derivator är kontinuerliga osv.

Några partiella differentialekvationer från fysik

Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

där $c > 0$ betecknar hastigheten.

Exempel

(a) Visa $f(x, y) = e^{kx} \cos(ky)$ och $g(x, y) = e^{kx} \sin(ky)$ löser Laplace ekvation.

(b) Visa att $f(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct)$ löser vågekvationen om g och h är C^2-glatta funktioner av en variabel.