Föreläsning 3, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

3 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 12.1: 5, 9, 13, 15, 17, 23, 27, 33. 12.2: 5, 7, 9, 11, 15.

Funktioner av flera variabler

Volymen av en konservburk med radie r och höjd h ges av formeln

$$V = \pi r^2 h.$$

Här beror V på två variabler, nämligen r och h. Därför kan vi skriva $V(r, h)$ för att betona detta. I det här fallet är det naturligt att inskränka sig till $r \geq 0$ och $h \geq 0$. Detta motsvarar att avgränsa sig till en naturlig *definitionsmängd*. Samtidigt talar man ibland om *värdemängden*, som blir mängden av alla värden som kan antas om variablerna ligger i definitionsmängden. I detta exempel blir det $V \geq 0$ som beskriver värdemängden.

Hur ritar vi grafer?

Om en funktion beror av två variabler x, y kan vi skriva den som $f(x, y)$, som motsvarar att för givna tal x och y kan vi räkna ut värdet $f(x, y)$. I envariabelkursen ritade vi en massa grafer, hur gör vi här?

Funktionsgraf

Motsvarande funktionsgraf ges av relationen $z = f(x, y)$, dvs av alla punkter i rummet $(x, y, f(x, y))$ om (x, y) ligger i definitionsmängden.

I princip kommer grafen att vara en *yta* i tredimensionella rummet. Här kan datorgrafik vara mycket användbart!

EXEMPEL

Rita grafer till: (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Topografiska metoder: nivåkurvor

Om ni har orienterat någon gång så vet ni att höjdskillnader i terrängen utmärks genom s. k. *nivåkurvor*. Detta motsvarar att man ritar upp kurvor i xy-planet där $f(x, y) = C$ för ett antal olika val av konstanten C, och markerar motsvarande konstant C intill kurvan.

Exempel

Rita nivåkurvor till (a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Gränsvärden och kontinuitet

Vad ska det betyda att

$$f(x, y) \to L \text{ då } (x, y) \to (a, b)?$$

Intuitivt handlar det om att då punkten (x, y) närmar sig (a, b) ska funktionsvärdet $f(x, y)$ närma sig talet L. Detta begrepp är ju intuitivt självklart men inte så lätt att få till på ett rigoröst vis. Vi kan använda oss av kvantorerna $\forall$ och $\exists$, som utläses som $\forall$ = för varje, $\exists$ = det finns. Vi vill ju säga att när (x, y) är nära (a, b), dvs då $|(x, y) - (a, b)| < \delta$ för något litet men positivt tal δ, så ska $|f(x, y) - L| < \epsilon$, dvs $f(x, y)$ vara nära L. Nu visar det sig att ϵ ska väljas först, och δ ska väljas sedan (så det får bero av ϵ):

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0\,; \ 0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Lyckligtvis är det rätt sällan man behöver luta sig mot definitionen av gränsvärde, det finns ju en hel del standardmetoder.

NOTATION: Vi skriver ofta alternativt att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.

EXEMPEL PÅ RÄKNEREGLER

RÄKNEREGLER

Om $f(x,y) \to L$ och $g(x,y) \to M$ då $(x,y) \to (a,b)$ så:

$$f(x,y) + g(x,y) \to L + M, \tag{1}$$
$$f(x,y) - g(x,y) \to L - M, \tag{2}$$
$$f(x,y)g(x,y) \to LM, \tag{3}$$
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \to \frac{L}{M}. \tag{4}$$

Dessutom, om funktionen $F(t)$ är kontinuerlig i $t = L$, så gäller att $F(f(x,y)) \to F(L)$ då $(x,y) \to (a,b)$.

OBS! I (4) behövs tilläggsvillkoret att $M \neq 0$.

Kontinuitet

Exempel

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} x^2/y^3 = 4/27$.
(b) Gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2+y^2)$ saknas! Varför?
(c) Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y/(x^2+y^2) = 0$.
(d) Finns $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$?
(e) Finns $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$?

DEFINITION

Att funktionen $f(x,y)$ är *kontinuerlig* i punkten betyder att

$$f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y),$$

där alltså både funktionsvärdet $f(a,b)$ och gränsvärdet ska finnas och vara lika.