Föreläsning 2, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

2 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 11.1: 17, 21, 33. 11.2: 3. 11.3: 5, 7, 11, 13, 15.

Vektorvärda funktioner av en variabel

En partikels rörelse i rummet beskrivs av hur positionen (x, y, z) beror av tiden t. Vi beskriver det som

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Ibland är det fördelaktigt (av utrymmesskäl t. ex.) att ersätta dessa tre likheter med en enda, som vi skriver som $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, där $\mathrm{r} = (x, y, z)$ är den s. k. *ortsvektorn*. I läroboken inför man basvektorsbeteckningarna

$$\begin{cases} \mathbf{i} = (1, 0, 0), \\ \mathbf{j} = (0, 1, 0), \\ \mathbf{k} = (0, 0, 1), \end{cases}$$

vilket betyder att ortsvektorn $\mathrm{r} = (x, y, z)$ kan skrivas som $\mathrm{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Vi kommer inte att använda denna konvention genomgående, men i alla fall ibland när det passar.

Hastighet och fart

Vi kommer ihåg att derivatan till en reelvärd funktion av en variabel $f(x)$ ges som gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

dvs som kvoten av förändringen i f med förändringen i x. Vi gör samma när vi definierar derivatan av en vektorärd funktion.

DERIVATA AV VEKTORVÄRD FUNKTION

Vi sätter som derivata av $\mathbf{r}(t)$ gränsvärdet

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}f(t)}{\Delta t}.$$

Nu när vi tolkar $\mathbf{r}(t)$ som en ortsvektor blir $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ *hastigheten*.

OBS!

Om $\mathrm{r} = \mathrm{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ så blir alltså $\mathrm{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, dvs vi deriverar bara *komponentvis*.

FARTEN

Om $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ är hastigheten är dess längd $|\mathbf{v}(t)|$ den s. k. *farten*.

Glatthet

GLATTHET (SKALÄR)

Om en funktion av en variabel har derivata som är kontinuerlig säger vi att den är C^1-glatt. På samma sätt säger vi att funktionen är C^2-glatt om även andraderivatan finns och är kontinuerlig. Analogt C^3-glatt etc.

GLATTHET (SKALÄR)

En vektorvärd funktion $\mathbf{r}(t)$ är C^1-glatt om dess komponenter $x(t)$, $y(t)$, och $z(t)$ alla är C^1-glatta. På samma sätt C^2-glatta, C^3-glatta, etc.

Man undrar om glatthet för partikelns rörelse i tiden kommer av avspegla sig i glatthet hos partikelbanan.

Exempel

Om vi tar partikelrörelsen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, 0)$ så är den hur glatt som helst. Men om vi ritar partikelbanan ser vi att denna ej är glatt i $t = 0$. RITA: Får en "cusp". Problemet beror på att $\mathbf{r}'(0) = (0, 0, 0)$. [Räkna själv: $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 2t, 0)$]

Acceleration

Accelerationen

Om vi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ beskriver partikelns rörelse i rummet och $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ är hastigheten, så är $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ *accelerationen*.

Exempel

Betrakta partikelrörelsen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$. Ange hastighet och acceleration i punkten $(1, 1, 1)$. [Vilken tid? Jo, $t = 1$. Och $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ samt $\mathbf{r}''(t) = (0, 2, 6t)$. Dessa ska evalueras i $t = 1$]

RÄKNELAGAR

RÄKNELAGAR

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t)+\lambda(t)\mathbf{u}'(t) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}'(t)+\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t)) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}. \tag{6}$$

EN TILLÄMPNING

Ovanstående räknelagar är analoga med de vanliga skalära räknelagarna. (1) är additionsregeln. (2), (3), och (4) är produktregeln i olika versioner. (5) är kedjeregeln. (6) är en annan sorts kedjeregel. Obs att i (6) behöver vi anta att $|\mathbf{u}(t)| \neq 0$. Vi kan ju göra mer saker med vektorer än med skalärer!

Exempel

Utveckla med hjälp av räknelagarna uttrycket

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{u}(t) \cdot [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}''(t)]\big).$$

Exempel

EXEMPEL

Antag att en rörelse beskrivs av att $\mathbf{r}(0) = (1, 3, 0)$ och att $\mathbf{r}'(t) = (2, 0, 0) \times \mathbf{r}(t)$. Finns härur $\mathbf{r}(t)$.

Kurvor och parametriseringar

Vad är en kurva?

Vi kommer att tänka oss att en kurva består av alla de punkter som en partikelrörelse besöker. Men givet en och samma kurva kan vi ju faktiskt gå runt längs med den i olika takt. Dessa olika sätt att gå runt motsvarar olika *parametriseringar* av kurvan i fråga. Alternativt kanske vi inte ens har en parametrisering given oss, utan kurvan är given på ett geometriskt sätt. Då kan vi behöva leta rätt på en parametrisering!

EXEMPEL

Betrakta linjen som ges som skärningen av planen $y = 2x - 4$ samt $z = 3x + 1$. Parametrisera linjestycket som går från $(2, 0, 7)$ till $(3, 2, 10)$.

Utflikning om topologi

Kurvor

En kurva i planet eller rummet kan skära sig själv. Om den *inte* gör det sägs den vara *enkel*. även om den är enkel kan den likväl sluta i samma punkt som den började. I så fall sägs den vara *sluten*.

Exempel

Parametrisera kurvan som bildar skärningen av ytorna $x^2 + y + z = 2$ och $xy + z = 1$.

Båglängd

Båglängd av kurva

Båglängden av en kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ges av integralen

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt,$$

där $[a, b]$ är parameterintervallet.

Observera att kurvans längd inte beror av valet av parametrisering.

Specialfall: graf i planet

Om vi har en kurva i planet $y = f(x)$ kan vi parametrisera med x, dvs $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ och det följer att båglängden blir

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

Polära koordinater, samt lite exempel

Specialfall: polära koordinater

Om vi har en kurva i planet som ges på polär form $r = g(\theta)$, så blir båglängdselementet

$$ds = \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}d\theta,$$

och båglängden motsvarande integral.

Exempel

I rummet, betrakta kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2, t^3)$ för $0 \leq t \leq 1$. Beräkna kurvans längd!