Föreläsning 18, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

6 december 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 16.5: 1, 3, 5.

Stokes' sats i rummet

Vi minns att Greens formel säger att i planet har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{D}} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA,$$

om kurvan $\mathcal{C}$ omsluter området $\mathcal{D}$ i positiv led. Här är förstås $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Stokes' sats är en mer generell variant som gäller för slutna kurvor i rummet.

STOKES' SATS

Vi har att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Härvid är $\mathcal{C}$ en sluten kurva i rummet, och $\mathcal{S}$ en yta i rummet vars "rand" utgörs av kurvan $\mathcal{C}$, och $\mathbf{n}$ är enhetsnormalen till ytan, riktad enligt skruvregeln.

Konservativa fält

OBS!

Det finns många sådana ytor $\mathcal{S}$ med en given randkurva $\mathcal{C}$. RITA!

Konservativa fält: Observationer

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt $\iff \mathbf{F} = \nabla\phi$ för en potential ϕ.

(b) $\mathbf{F}$är konservativt $\iff \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$.

(c) Vi ser ur (a) att $\mathbf{F}$ konservativt $\implies \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(d) Vi ser ur Stokes' sats att (a) att $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0} \implies \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, förutsatt att $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ gäller längs med en yta $\mathcal{S}$ med randkurva $\mathcal{C}$.

Eftersom (d) alltid gäller lokalt har vi:

Konservativitet och rotationsfrihet

Lokalt gäller att ett vektorfält är konservativt $\iff$ det är rotationsfritt.

Exempel

EXEMPEL

Beräkna arbetintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$ och $\mathcal{C}$ är snittkurvan mellan planet $2x + 2y + z = 3$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. Rotationsriktningen är sådan att projektionen av $\mathcal{C}$ på xy-planet är moturs.

EXEMPEL

Beräkna ytintegralen

$$I = \iint_{\mathcal{S}} (\mathrm{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

där $\mathcal{S}$ är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ som ligger ovanför xy-planet, $\mathbf{n}$ är enhetsnormalen som pekar utåt från sfärens centrum, och $\mathbf{F} = (y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz}, -e^{xyz})$.