Föreläsning 17, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

6 december 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 16.3: 3, 5, 9. 16.4: 5, 11, 15.

Preliminära observationer

Observation

Analysens huvudsats säger att

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

om f' är Riemann-integrerbar. Här kan vi tänka på vänster led som en integral i en dimension, med höger led är en integral över randen, som har dimension 0.

Greens sats är ett likartat resultat där en tvådimensionell integral och en endimensionell integral blir lika.

Greens sats i planet

GREENS FORMEL

Om $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, så är

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Här är $\mathcal{C}$ randkurva till området $\mathcal{D}$, och kurvan tas i positiv led.

Observation

(a) Traditionellt skriver man (P, Q) istället för (F_1, F_2).

(b) Vi kan skriva ovanstående på formen

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdy.$$

Exempel

EXEMPEL

Om

(a) $\mathbf{F} = (0, x, 0)$ eller

(b) $\mathbf{F} = (-y, 0, 0)$ eller

(c) $\mathbf{F} = (-y/2, x/2, 0)$

så är i vardera fallet

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,$$

så enligt Greens formel så har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} xdy = -\oint_{\mathcal{C}} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \mathrm{area}(\mathcal{D}).$$

Tillämpa sedan detta på kurvan $\mathbf{r}(t) = (3(\cos t + \sin t), 2(\sin t - \cos t))$.

Exempel

En kurvintegral

Låt $\mathcal{C}$ vara positivt orienterad randkurva till ett område $\mathcal{D}$. Antag att kurvan inte passerar genom origo i planet. Visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

är lika med 0 om origo inte ligger i $\mathcal{D}$ medan den är lika med 2π om origo ligger i $\mathcal{D}$.

Divergenssatsen i 2 dimensioner

Divergenssatsen i 2 dim

Om normalen är utåtriktad har vi att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

Härvid är

$$\mathbf{n} ds = (dy, -dx)$$

och

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Resultatet är en alternativ formulering av Greens formel.

Divergenssatsen i rummet

Divergenssatsen (Gauss sats)

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Härvid är $\mathcal{S}$ en sluten yta som utgör rand till kroppen $\mathcal{K}$, och normalen är utåtriktad.

Exempel

EXEMPEL

Låt $\mathbf{F} = (bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$ och låt $\mathcal{S}$ vara randyta till cylindern som ges av

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2, \\ 0 \leq z \leq b. \end{cases}$$

Beräkna flödet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Varianter på divergenssatsen

SATS

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dV = -\oiint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{n} \, dS.$$

SATS

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} \operatorname{grad} \phi \, dV = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \phi \mathbf{n} \, dS.$$