Föreläsning 16, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

5 december 2017
KTH

Rekommenderade uppgifter: 16.1: 3, 7, 11. 16.2: 9, 15, 17.

Gradient, divergens, och rotation

Gradienten

Om f är ett skalärfält skriver vi

$$\nabla f = \mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

och kallar det för *gradienten*. Gradienten blir ett *vektorfält*.

Nablasymbolen

Vi skriver

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

som blir en vektoriell deriveringsoperator (kallad "nabla").

Divergensen

Divergensen

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett vektorfält. *Divergensen* av $\mathbf{F}$ är skalärfältet

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

OBS!

Notera att $\nabla \cdot \mathbf{F}$ och $\mathbf{F} \cdot \nabla$ betyder olika saker. Det första är ett skalärfält medan det andra betecknar en differentialoperator.

Rotationen

Rotationen

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett vektorfält. *Rotationen* av $\mathbf{F}$ är vektorfältet

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Rotationen av ett vektorfält i 2 dimensioner

Men om $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ bara? Då tänker vi oss fältet utvidgat till 3 dimensioner genom att skriva $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ och räknar därefter ut rotationen. Då blir, eftersom F_1, F_2 inte beror på z,

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Exempel

EXEMPEL

Bestäm divergens och rotation för vektorfältet

$$\mathbf{F} = (xy, y^2 - z^2, yz).$$

EXEMPEL i 2 dimensioner

Bestäm divergens och rotation av fältet $\mathbf{F} = (xe^y, ye^x)$.

Tolkning av divergensen

Ytelement på funktionsytor

Betrakta funktionsytan $z = g(x, y)$ där (x, y) ligger i området D. En naturlig parametrisering är

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, g(u, v)), \qquad (u, v) \in D.$$

Då blir ytelementet

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}_v| dudv = \sqrt{1 + (g'_u)^2 + (g'_v)^2} dudv$$

och om vi byter till (x, y) istället för (u, v) så kan vi skriva

$$dS = \sqrt{1 + (g'_x)^2 + (g'_y)^2} dxdy$$

EXEMPEL

Beräkna momentet

$$\iint_{\mathcal{S}} z dS$$

över konytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ mellan $z = 0$ och $z = 1$.

Ytor givna implicit

Areaelement på implicit given yta

Låt ytan $\mathcal{S}$ ges av ekvationen $G(x, y, z) = 0$. Då blir areaelementet

$$dS = \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G'_z(x, y, z)} \right| dxdy.$$

Det orienterade ytelementet

Orienterat ytelement

Om $\mathbf{n}$ betecknar enhetsnormalvektorn på ytan $\mathcal{S}$, och dS areaelementet, så är

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$$

det *orienterade areaelementet*. Notera att det beror på valet av normalrikting (det finns två).

Det orienterade areaelementet för en parametriserad yta

Eftersom

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}.$$

och

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

så blir

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du dv.$$

Orienterbarhet för yta

Lokalt går det alltid att på en glatt yta välja normalvektor på ett konsistent vis. Men det kan bli problem *globalt*. T ex *Möbiusbandet* visar på svårigheten.

Orienterbar yta

En yta sägs vara *orienterbar* om man kan välja ett kontinuerligt enhetsnormalvektorfält på ytan.

Flödesintegraler

Flöde genom yta

Flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ över den orienterbara ytan $\mathcal{S}$ ges av

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

När ytan är sluten skriver vi $\oiint$ istället för $\iint$ för att förtydliga. I detta fall talar vi om *flödet ut* om normalvektorn är utåtriktad eller *flödet in* om normalvektorn är inåtriktad.

EXEMPEL

Finn flödet av fältet $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ ut genom sfären av radie a med centrum i $\mathbf{0}$.

EXEMPEL

Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (x, y, z)$ genom cylinderytan $x^2 + y^2 = a^2$ med $-h \leq z \leq h$.

Tolkning av divergensen

Divergensen som lokalt flöde

Låt $\mathcal{S}_\epsilon$ beteckna en sfär av radie ϵ runt en punkt $\mathbf{r}_0$. Då är, om $\mathbf{n}$ betecknar normalen utåt,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Anmärkning

Med andra ord, flödet genom sfären delat med volymen på klotet innanför ger i gräns divergensen.

Divergenssatsen (Gauss sats)

Divergenssatsen

Om $\mathcal{S}$ är en sluten yta och $\mathcal{K}$ är kroppen som omsluts av $\mathcal{S}$, och $\mathbf{n}$ är utåtnormalen, så gäller att

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

Deltafunktionen och en utvidgning av funktionsbegreppet

Deltafunktionen

Deltafunktionen $\delta(x)$ är en tänkt funktion med egenskapen att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

för alla kontinuerliga funktioner f.

Någon sådan riktig funktion finns förstås inte. Men den kan istället förstås som en generaliserad funktion, kallad *distribution*.

En egenskap

Vi noterar att deltafunktionen har egenskapen att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x) f(x) dx = f(y)$$

för kontinuerliga funktioner f.

Gravitationsfältets divergens

Vi betraktar gravitationsfältet

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

En snabb kalkyl ger att $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ så om vi litar på divergenssatsen så borde

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

för varje sluten yta $\mathcal{S}$. Men om $\mathcal{S}$ är sfären av radie R kring origo blir normalfältet $\mathbf{n} = \mathbf{r}/R$ och därför

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} \, dS = 4\pi m,$$

oberoende av radien och alltså inte lika med 0! Så, vad blev fel? Fältet har en singularitet i origo, och man kan visa att

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 4\pi m \, \delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

dvs en punktmassa i origo av rätt storlek.

Tolkning av rotationen

Rotationen som lokal cirkulation

Låt $\mathcal{C}_\epsilon$ beteckna en cirkel av radie ϵ runt en punkt $\mathbf{r}_0$. Då är, om $\mathbf{n}$ betecknar enhetsnormalen till planet som $\mathcal{C}_\epsilon$ ligger i, riktad enligt skruvregeln. Då är

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Anmärkning

Med andra ord, arbetsintegralen delat med area på inneslutna cirkelskivan ger i gräns rotationen.

Rotation, Laplaceoperatorn

Rotationen: hur räkna ut?

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Laplace-operatorn

Differentialoperatorn

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

kallas för *Laplacianen*. Den kan tillämpas på ett skalärfält och vi får då ett annat skalärfält. Den kan även tillämpas komponentvis på ett vektorfält och ger oss ett annat vektorfält:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3).$$

Notation

En differentialoperator

Vi kommer ihåg notationen

$$\mathbf{G} \cdot \nabla = G_1 \frac{\partial}{\partial x} + G_2 \frac{\partial}{\partial y} + G_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

där $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Denna operator kan även den tillämpas inte bara på skalärfält utan även på vektorfält komponentvis.

Nabla-yoga

Låt ϕ, ψ vara skalärfält, och $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ vektorfält.

(a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(b) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$.

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$.

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Dvs $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$.

(h) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$. Dvs $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$.

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

Divergensfria och rotationsfria fält

Divergensfritt fält

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är *divergensfritt* om $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

Rotationsfritt fält

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är *rotationsfritt* om $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Rotationsfrihet och konservativitet (lokalt)

$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \exists \phi$ så att $\nabla \phi = \mathbf{F}$. [ϕ kallas *potential*]

Divergensfrihet och vektorpotential (lokalt)

$\operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \exists \mathbf{G}$ så att $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$. [$\mathbf{G}$ kallas *vektorpotential*]

Exempel

Exempel

Visa att $\mathbf{F} = (x^2 + yz, -2y(x+z), xy + z^2)$ är divergensfritt och finn en vektorpotential till fältet.