Föreläsning 15, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

1 december 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 15.5: 1, 7, 13. 15.6: 5, 9, 13, 15.

Ytor och ytintegraler

Parametrisering av yta

Om vi skriver $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ när (u, v) genomlöper ett område D i planet så får vi en *parametriserad yta*. RITA!

Anmärkning

I läroboken väljer man att kräva att $D = R$, en axelparallell rektangel. Men det är onödigt restriktivt!

Grafyta

En graf $z = f(x, y)$ över ett område D i xy-planet kan parametriseras: $\mathbf{r} = (u, v, f(u, v))$ där $(u, v) \in D$ fungerar.

Glatta ytor

Glatt yta

En mängd $\mathcal{S}$ i rummet är en *glatt yta* om varje punkt i mängden har en omgivning $\mathcal{N}$ så att $\mathcal{N} \cap \mathcal{S}$ kan beskrivas som

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{S} = \{Q \in \mathcal{N} : \; g(Q) = 0\}$$

där g är en glatt funktion med $\nabla g \neq 0$ för Q i $\mathcal{N} \cap \mathcal{S}$.

Tangentialvektorer och normalvektor till en yta

Vi parametriserar vår yta med $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

Tangentvektorer till yta

I den givna punkten $\mathbf{r}(u, v)$ på ytan är

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

två tangentvektorer till ytan.

Om ovanstående tangentvektorer är linjärt oberoende kan vi bilda ur dem en normalvektor till ytan i punkten.

Normalvektor till yta

I den givna punkten $\mathbf{r}(u, v)$ på ytan är kryssprodukten

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

en normalvektor till ytan. För att få en enhetsnormal kan vi dela med längden:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}.$$

Normalvektor till yta, ytelement

OBS!

Till en given yta finns två stycken enhetsvektorer i en given punkt. Detta reflekteras av att kryssprodukten är antikommutativ och om vi byter plats på u och v i parametriseringen får vi en normalvektor som pekar i motsatt riktning.

Ytelementet

Vi skriver

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

vilket ger ett geometriskt ytelement och väsentligen inte beror av valet av parametrisering.

Area på parametriserad yta

Vi definierar arean på ytan $\mathcal{S}$ som

$$\mathrm{area}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathcal{D}} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv.$$

Funktionsytor

Ytelement på funktionsytor

Betrakta funktionsytan $z = g(x, y)$ där (x, y) ligger i området D. En naturlig parametrisering är

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, g(u, v)), \qquad (u, v) \in D.$$

Då blir ytelementet

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}_v| dudv = \sqrt{1 + (g'_u)^2 + (g'_v)^2} dudv$$

och om vi byter till (x, y) istället för (u, v) så kan vi skriva

$$dS = \sqrt{1 + (g'_x)^2 + (g'_y)^2} dxdy$$

EXEMPEL

Beräkna momentet

$$\iint_{\mathcal{S}} z dS$$

över konytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ mellan $z = 0$ och $z = 1$.

Ytor givna implicit

Areaelement på implicit given yta

Låt ytan $\mathcal{S}$ ges av ekvationen $G(x, y, z) = 0$. Då blir areaelementet

$$dS = \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G'_z(x, y, z)} \right| dxdy.$$

Det orienterade ytelementet

Orienterat ytelement

Om $\mathbf{n}$ betecknar enhetsnormalvektorn på ytan $\mathcal{S}$, och dS areaelementet, så är

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$$

det *orienterade areaelementet*. Notera att det beror på valet av normalrikting (det finns två).

Det orienterade areaelementet för en parametriserad yta

Eftersom

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}.$$

och

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

så blir

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dudv.$$

Orienterbarhet för yta

Lokalt går det alltid att på en glatt yta välja normalvektor på ett konsistent vis. Men det kan bli problem *globalt*. T ex *Möbiusbandet* visar på svårigheten.

Orienterbar yta

En yta sägs vara *orienterbar* om man kan välja ett kontinuerligt enhetsnormalvektorfält på ytan.

Flödesintegraler

Flöde genom yta

Flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ över den orienterbara ytan $\mathcal{S}$ ges av

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

När ytan är sluten skriver vi $\oiint$ istället för $\iint$ för att förtydliga. I detta fall talar vi om *flödet ut* om normalvektorn är utåtriktad eller *flödet in* om normalvektorn är inåtriktad.

EXEMPEL

Finn flödet av fältet $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ ut genom sfären av radie a med centrum i $\mathbf{0}$.

EXEMPEL

Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (x, y, z)$ genom cylinderytan $x^2 + y^2 = a^2$ med $-h \leq z \leq h$.