Föreläsning 14, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

29 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 15.3: 7, 11. 15.4: 1, 5, 7, 15.

Kurvintegraler

Om $\mathcal{C}$ är en kurva, och ds står för båglängdselementet, vad ska

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$$

vara för något? Här är $f(x, y, z)$ en reellvärd funktion, dvs ett skalärfält. Kom ihåg att $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

KURVINTEGRAL MED ds

Vi parametriserar $\mathcal{C}$ med $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ för $a \leq t \leq b$. Då är $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ och således

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r}) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Speciellt är kurvans längd

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Exempel

EXEMPEL

Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds$$

där $\mathcal{C}$ är linjestycket från $(0, 0)$ till $(2, 1)$.

EXEMPEL

Finn tyngdpunkten för spiralhelixen

$$\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, bt), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Kurvintegraler av vektorfält

Låt nu $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält i rummet. Vi vill nu definiera kurvintegraler på formen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Detta kallas för en *arbetsintegral*. Vad ska $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tolkas som?

ARBETINTEGRAL

Vi skriver $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ och $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ och skriver

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

för integralen som i parametriseringen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ för $a \leq t \leq b$ ges av

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Arbetsintegraler, forts

Vi kan även tänka oss att skriva $d\mathbf{r} = \hat{T}ds$, där $\hat{T}$ är enhetsvektor i tangentialriktningen längs med $\mathcal{C}$. Då blir:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \hat{T}) ds.$$

Observera att i en parametrisering blir

$$\hat{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad ds = |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Cirkulation

Om $\mathcal{C}$ är en sluten kurva säger vi att

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

är cirkulationen av $\mathbf{F}$ runt $\mathcal{C}$.

Exempel

EXEMPEL

Låt **F** vara vektorfältet i xy-planet $\mathbf{F} = (y^2, 2xy)$. Beräkna arbetintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ från $(0,0)$ till $(1,1)$ längs med

(a) räta linjen $y = x$,

(b) kurvan $y = x^2$,

(c) längs med linjesegment från $(0,0)$ till $(0,1)$ och sedan till $(1,1)$.

Lite topologi

Sammanhängande område

Ett område är enkelt sammanhängande om varje två punkter kan sammanbindas inom D av en glatt kurva.

Enkelt sammanhängande område

Ett sammanhängande område D är *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva inom D låter sig kontinuerligt deformeras till en punkt utan att lämna D.

Konservativa fält: ekvivalenta formuleringar

SATS

Låt D vara ett öppet sammanhängande område och $\mathbf{F}$ ett (glatt) vektorfält på D. Då är följande ekvivalenta:

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt på D,

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje glatt sluten kurva $\mathcal{C}$ i D,

(c) Kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen (dvs beror bara av slutpunkterna).

OBS!

Om ϕ är potentialen till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F}$ så har vi att

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0).$$

Exempel

EXEMPEL

För vilka värden på konstanterna A och B är fältet

$$\mathbf{F} = (Ax\sin(\pi y), x^2\cos(\pi y) + Bye^{-z}, y^2e^{-z})$$

konservativt? Beräkna sedan för detta val av A, B integralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där kurvan ges av

(a) $\mathbf{r} = (\cos t, \sin(2t)\sin^2 t)$, för $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) Snittet av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ och planet $z = 3x - 2y$ från $(0, 0, 0)$ till $(1, \frac{1}{2}, 2)$.

EXEMPEL

Beräkna integralen

$$\oint_{\mathcal{C}} (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$$

moturs längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$.