Föreläsning 13, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

28 november 2017
KTH

Rekommenderade uppgifter: 15.1: 3, 5, 17. 15.2: 3, 5, 7, 21.

Vektorfält

DEFINITION

Ett *skalärfält* Φ på ett område D i $\mathbb{R}^n$ är en funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$. Ett *vektorfält* $\mathbf{F}$ på D är en funktion $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$.

EXEMPEL i 3dim

Temperaturen i ett rum är ett skalärfält. På samma vis är den potentiella energin ett skalärfält. Exempel på vektorfält är vattenströmmar, elektriska och magnetiska fält.

Fältlinjer

Antag att $\mathbf{F}$ är ett vektorfält.

DEFINITION

En *fältlinje* är en lösning $\mathbf{r}(t)$ till

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \lambda(t)\,\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)),$$

där $\lambda(t)$ är en skalär med $\lambda(t) \neq 0$.

KOMMENTAR

En fältlinje beskriver banan för en partikel som rör sig längs med vektorfältet.

Fältlinjer i 3dim

I 3 dimensioner kan ekvationen för fältlinjen skrivas

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}.$$

Härvid är $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ uppdelning i komponenter, och skalären $\lambda(t)$ har eliminerats.

Fältlinjer: exempel

EXEMPEL

finn fältlinjerna till fältet $\mathbf{F} = (xz, 2x^2z, x^2)$.

Vektorfält i polära koordinater

Ett vektorfält i planet kan skrivas

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j},$$

där $\mathbf{i} = (1, 0)$ och $\mathbf{j} = (0, 1)$. Ibland kan det vara bättre att beskriva fältet med hjälp av polära koordinater:

$$\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

där

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

Bägge är enhetsvektorer, $\hat{\mathbf{r}}$ radiellt och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pekar transversellt. Den vektorvärda differentialen $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ kan skrivas på formen

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}dr + r\hat{\boldsymbol{\theta}}d\theta.$$

Fältlinjer i polära koordinater

Fältlinjer i polära koordinater

Lösningarna till ekvationen

$$\frac{dr}{F_r} = \frac{rd\theta}{F_\theta}$$

är fältlinjer.

EXEMPEL

Skissa vektorfältet $\mathbf{F}(r,\theta) = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$ och hitta fältlinjerna.

Gradienten i 3dim

Gradienten av ett skalärfält

Om $\phi(x, y, z)$ är ett skalärfält, så är

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

motsvarande gradient. Den är ett *vektorfält*.

FRÅGA

Är alla vektorfält på formen $\nabla\phi$?

SVAR

Nej, inte alls! Ett vektorfält med komponenter $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är nämligen ett gradientfält enbart om (varför?)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Konservativa fält

DEFINITION

Vektorfältet $\mathbf{F}$ är *konservativt* om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för något skalärfält ϕ. Funktionen ϕ kallas för *potentialfältet*.

EXEMPEL

Gravitationsfältet är konservativt. Nämligen,

$$\mathbf{F} = -km\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

har motsvarande potentialfält

$$\phi = \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

KOMMENTAR

Många fält inom fysiken är konservativa. Om det inte vore så skulle man kunna utvinna energi ur dem, vilket förmodligen skulle försvaga dem så de försvann.

Ett nödvändigt villkor för konservativitet

Vi har redan tidigare observerat följande.

SATS

Om vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är konservativt så måste

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Ekvipotentialyta

Ytan där $\phi = C$ för en konstant C kallas *ekvipotentialyta*.

SATS

Om $\mathbf{F}$ är konservativt med potentialfält ϕ, så är ekvipotentialytan $\phi = C$ ortogonal mot all flödeslinjer som skär den.

Konservativa fält: exempel

Följande fält dyker upp inom elektromagnetismen. Att det inte är konservativt gör att man kan flytta energi från fältet till en annan form.

EXEMPEL

Betrakta fältet

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(i) Visa att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

gäller överallt utom i origo.

(ii) Låt nu θ beteckna vinkeln till x-axeln, som vanligt, med $0 \leq \theta < 2\pi$. Visa att $\nabla \theta = \mathbf{F}$.

(iii) Visa att $\mathbf{F}$ ej är konservativt.

Källor, sänken

DEFINITION

Betrakta potentialen
$$\phi = -\frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$
och motsvarande gradientfält $\nabla\phi$. Om $m > 0$ sägs fältet ha en *källa* av styrka m i punkten $\mathbf{r}_0$. Om istället $m < 0$ sägs fältet ha ett sänke av styrka $|m|$ i punkten $\mathbf{r}_0$.