Föreläsning 12, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

24 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 14.5: 5, 7, 9. 14.6: 3, 7, 11. 14.7: 5, 9, 13, 21, 27.

Trippelintegraler

Om $f(x, y, z)$ är en funktion av tre variabler på ett begränsat område B, så kan vi definiera *trippelintegralen*

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \iiint_B f(x, y, z)dxdydz$$

På samma sätt som en dubbelintegral är volymen med tecken av kroppen mellan funktionsgrafen och xy-planet, så är trippelintegralen ovan en 4-dimensionell volym mellan den 3-dimensionella grafen och xyz-rummet. Speciellt gäller att

$$\mathrm{Vol}(B) = \iiint_B dV.$$

Om nu t ex ρ är densiteten (=tätheten) hos ett inhomogent material så blir

$$\iiint_B \rho\, dV = \text{massan}.$$

Ett exempel

Exempel

Beräkna för $B : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ trippelintegralen

$$\iiint_B (2 + x - \sin z) dV.$$

Hur vi räknar ut trippelintegraler

PROBLEMSTÄLLNING

Hur beräknar vi

$$\iiint_B f(x, y, z)dxdydz?$$

Här föreställer vi oss att B ges på något lämpligt vis. T ex kanske B ges av att följande tre olikheter ska vara uppfyllda:

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1, \\ a_2(x) \leq y \leq b_2(x), \\ a_3(x, y) \leq z \leq b_3(x, y). \end{cases}$$

Iterationsmetoden

ITERATIONSMETODEN

Om B ges som ovan, är

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2(x)}^{b_2(x)}\left(\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

SPECIALFALL

Om alla integrationsgränserna är *konstanta*, vilket betyder att B är ett axelparallellt rätblock, och funktionen är av produkttyp

$$f(x,y,z) = F(x)G(y)H(z),$$

så är

$$\begin{aligned}\iiint_B f(x,y,z)dxdydz &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z)dzdydx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} F(x)dx \int_{a_2}^{b_2} G(y)dy \int_{a_3}^{b_3} H(z)dz.\end{aligned}$$

Trippelintegraler

Anmärkning

Motsvarande formel gäller även i två dimensioner, eller t ex fyra.

Exempel

Om T är tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, och $(0,1,0)$, och $(0,0,1)$, beräkna trippelintegralen

$$I = \iiint_T y dV.$$

Notera att T beskrivs av att $x, y, z \geq 0$ och av $x + y + z \leq 1$.

Exempel

Exempel

Uttryck den itererade integralen

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^z f(x,y,z)dx \right) dz \right) dy$$

som en trippelintegral, och skissera kroppen över vilken trippelintegralen tas.

Variabelbyte i trippelintegraler

Vi betraktar variabelbytet

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

Volymselementet under variabelbyte

$$dV = dxdydz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

Här träffar vi på Jacobianen i tre dimensioner, som ges som en determinant av en 3×3 matris.

Volym av ellipsoid

Betrakta ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Använd variabelbytet $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ för att beräkna dess volym.

CYLINDRISKA KOORDINATER

Variabelbytet

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

kallas för *cylindriska koordinater*.

Volymselementet

Motsvarande volymselement är

$$dV = r dr d\theta dz.$$

Sfäriska koordinater

Vi drar oss till minnes att sfäriska koordinater ges i termer av $[R, \phi, \theta]$, där R är avståndet till origo och ϕ, θ är två vinklar. Sambandet blir

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta, \\ y = R\sin\phi\sin\theta, \\ z = R\cos\phi. \end{cases}$$

Volymselementet blir

$$dV = R^2 \sin\phi dRd\phi d\theta.$$

Exempel

EXEMPEL

Antag att en planet har densitet

$$\rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$

för $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, där $a > 0$ är planetens radie. Bestäm planetens massa.

Tillämpningar av multipelintegraler

AREA PÅ GRAFYTA

Betrakta grafen

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

Den är en yta med area som ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Exempel

Bestäm arean av hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - y^2$ innanför cylindern $x^2 + y^2 = a^2$. Härvid blir $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ en cirkelskiva, och $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$, så arean blir

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \frac{\pi}{6}\Big((1 + 4a^2)^{3/2} - 1\Big).$$

Masscentrum

Låt R vara en kropp och ρ den (variabla) densiteten i kroppen. Om nu $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$ är masscentrum på kroppen, ges detta av

$$\mathbf{r}^* = \frac{\iiint_R \rho \mathbf{r} dV}{\iiint_R \rho dV}.$$

Exempel

Bestäm masscentrum för kroppen S som definieras av de fyra villkoren att $x, y, z \geq 0$ samt att $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.