Föreläsning 11, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

23 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 14.3: 1, 3, 13, 27. 14.4: 5, 9, 15, 19, 21.

Generaliserade integraler och medelvärdessatsen

PROBLEM

Generaliserade integraler behövs när (a) integrationsområdet D är obegränsat, eller (b) integranden $f(x, y)$ är obegränsad. Så, vad blir i dessa fall

$$\iint_D f(x, y)dxdy?$$

LÖSNINGSIDÉ

(a) Om integrationsområdet D är obegränsat, så bildar vi en växande följd av begränsade områden $D_1, D_2, D_3, \ldots$ vars union är D, och sätter

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{n \to +\infty} \iint_{D_n} f(x, y)dxdy.$$

(b) Om integranden $f(x, y)$ är obegränsad så gör vi på samma sätt bara att vi låter D_n undvika de punkter där f blir obegränsad.

Svårigheter

PROBLEM SHOOTING

Hur vet vi att lösningsidén ger ett bra svar? T ex kanske det är så att gränvärdet

$$\lim_{n\to+\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

beror på valet av områdena D_n som utfyller D. Det skulle vara problematiskt!

Positiva integrander

POSITIV INTEGRAND

Om $f(x,y) \geq 0$ på D så kommer inte

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

att bero på valet av D_n. Gränsvärdet blir antingen ett reellt tal ≥ 0 eller $+\infty$.

Exempel på positiva integrander

EXEMPEL

Låt R vara området som ges av $|y| \leq x$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R e^{-x^2}\,dxdy.$$

EXEMPEL

Låt D vara området som ges av $x \geq 1$ och $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dxdy}{x+y}.$$

EXEMPEL

Låt D vara området mellan kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dxdy}{xy}.$$

Medelvärden

Medelvärdet av en funktion över ett område

Om D är ett område i planet, och f en funktion definierad på D, är dess medelvärde

$$\bar{f} = \frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{\text{area}(D)}.$$

Medelvärdet antas

Om D är slutet och sammanhängande, och f är kontinuerlig på D, så antar funktionen sitt medelvärde.

Tyngdpunkt

Låt

$$\bar{x} = \frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{\text{area}(D)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D ydxdy}{\text{area}(D)}.$$

Då kallas punkten $(\bar{x}, \bar{y})$ för D:s *tyngdpunkt*.

Exempel

Exempel

Vad är medelvärdet av $x^2 + y^2$ över triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, och $(1, 1)$?

Exempel

Vilken är tyngdpunkten för polygonområdet med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ och $(2, 2)$?

Exempel

Vilken är tyngdpunkten för halvcirkelskivan som definieras av att $x^2 + y^2 \leq 4$ och $y \geq 0$?

Dubbelintegraler i polära koordinater

Areaelement i polära koordinater

Vi skriver $dA = dxdy$ för areaelementet i xy-planet. Om vi använder polära koordinater istället blir $dA = rdrd\theta$.

OBS!

Faktorn r i areaelementet kan förstås som en Jacobian.

Exempel

Låt D ges av villkoret $x^2 + y^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$$

med hjälp av polära koordinater.

Fler exempel

Exempel

Låt R vara sektorn som i polära koordinater ges av $a \leq r \leq b$ samt $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dxdy.$$

Exempel

Visa att:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Den här integralen används flitigt i samband med statistik och sannolikhetsteori.

Mer allmänna koordinatbyten

När vi jobbar med polära koordinater vet vi hur vi ska transformera areaelementet. Men hur blir det i samband med ett mer allmänt koordinatbyte? Vi tänker oss koordinatbytet

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

och att området D i xy-koordinater motsvarar området $\tilde{D}$ i uv-koordinater.

SATS

Låt $f(x, y)$ vara en funktion definierad på området D, och låt $g(u, v)$ ges av

$$g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big).$$

Då gäller att

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{\tilde{D}} g(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

Jacobianen

Areaelementet vid variabelbyte

Det viktigaste är att areaelementet transformeras enligt

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Härvid är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Jakobianen.

Exempel

Areaberäkning

Bestäm med hjälp av lämpligt koordinatbyte arean av den elliptiska skivan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Prova med koordinatbytet $x = au$, $y = bv$ först!

Exempel

Bestäm integralen

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy,$$

vavidr D är området där följande tre villkor är uppfyllda:

$$0 \leq y \leq x, \quad x^2 + 4y^2 \leq 4.$$