Föreläsning 10, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

21 november 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 14.1: 15, 19, 21. 14.2: 3, 5, 15, 23.

Dubbelintegraler

PROBLEM

Hur ska vi definiera dubbelintegralen

$$\iint_R f(x,y)dxdy,$$

om R är en axelparallell rektangel?

Hur gjorde vi i en variabel? Vi använde Riemannsummor, som byggde på en uppdelning av basintervallet i småbitar.

Riemannsummor i 2 dimensioner

Vi tänker oss rektangeln R som beskriven av att $a \leq x \leq b$ och $c \leq y \leq d$. Vi delar in denna rektangel i pyttesmå delrektanglar som alla är axelparallella, och bildar en motsvarande Riemannsumma.

Riemannintegralen

Låt *finheten* i indelningen i delrektanglar vara maximala diametern för delrektanglarna.

RIEMANNINTEGRALEN ÖVER AXELPARALLELL REKTANGEL

Om Riemannsumman konvergerar mot ett tal I då finheten går mot 0, så säger vi att funktionen är Riemannintegrerbar samt att

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy = I.$$

Detta funkar nog för en axelparallell rektangel, men hur ska vi klara av att integrera över ett mer allmänt område? Vi definierar

$$1_D(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ om } (x,y) \in D, \\ 0, \text{ annars.} \end{cases}$$

Riemannintegralen, forts

RIEMANNINTEGRALEN ÖVER BEGRÄNSAT OMRÅDE

Antag att D är ett begränsat område i xy-planet. Låt R vara en axelparallell rektangel som är så stor att D ligger inuti R. Vi sätter:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R 1_D(x,y)\, f(x,y)dA.$$

EXEMPEL

Låt D vara skivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Då är

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \frac{2\pi}{3}.$$

Varför?

Integrationsområden vi kan hantera

Vi är intresserade av områden av typen

$$c(x) \leq y \leq d(x) \text{ medan } a \leq x \leq b.$$

Alternativt är vi intresserade av områden som ser ut så här: områden av typen

$$a(y) \leq x \leq b(y) \text{ medan } c \leq y \leq d.$$

Dessa fall utesluter inte varann förstås.

RITA!

Hur beräknas dubbelintegraler?

SATS (iterationsmetoden)

Om D ges som

$$c(x) \leq y \leq d(x) \text{ medan } a \leq x \leq b,$$

så är

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

OBS!

Motsvarande om vi byter roller för x och y. Dvs, om D ges av

$$a(y) \leq x \leq b(y) \text{ medan } c \leq y \leq d,$$

så blir

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Dubbelintegralen som en volym

Om $f(x,y) \geq 0$ kan vi tolka dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

som volymen på den kropp i 3 dimensioner som ligger över D och begränsas av planet $z = 0$ och ytan $z = f(x,y)$. Mer allmänt är dubbelintegralen en volum *med tecken*.

Exempel

EXEMPEL

Finn volymen på kroppen som ligger ovanför kvadraten Q som ges av att $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$, som begränsas uppåt av $z = 4 - x - y$ och nedåt av $z = 0$.

EXEMPEL

Bestäm dubbelintegralen

$$\iint_T xy dx dy$$

där T är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, och $(1,1)$.