Föreläsning 1, SF1626 Flervariabelanalys

Haakan Hedenmalm (KTH, Stockholm)

31 oktober 2017
KTH
Rekommenderade uppgifter: 10.1: 11, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39.
10.6: 3, 5, 9, 13.

Analytisk geometri i 3 dim

I en tredimensionell värld, hur kan vi beskriva var vi befinner oss egentligen? Vi behöver en metod säga att vi är på ett ställe och inte ett annat! Vi väljer (godtyckligt) en referenspunkt som vi kallar **origo** och därifrån tre ortogonala (=vinkelräta) riktningar som utgår från origo. Dessa är förstås också godtyckliga i viss mening. När vi valt den första riktningen har vi mindre valmöjligheter för nästa, och ännu mindre för den tredje och sista. Vi kan tänka oss att de riktningar vi valt kallas för **till höger** x, **framåt** y, och **uppåt** z. Dessa bildar en triplett xyz, om vi tänker på dem som axlar, men även taltripletter (x, y, z) om vi betänker hur långt vi behöver flytta oss frå origo för att komma till en given position. Här tänker vi x som antal meter vi behöver röra oss i riktningen längs med x-axeln (med tecken!), y som antal meter vi behöver röra oss i riktningen längs med y-axeln (med tecken!), och z som antal meter vi behöver röra oss i riktningen längs med z-axeln (med tecken!).

Skruvregeln och högersystem

Ordningen i xyz är ibland viktig. Om axlarna är samma som ovan (x=höger, y=framåt, z=uppåt) så kan vi prova att skriva dem i olika ordning på 6 st olika sätt:

$$xyz, \;\; yzx, \;\; zxy, \;\;\; xzy, \;\; zyx \;\; yxz,$$

De första tre fås genom att vi skjuvar fram den första bokstaven så den istället blir sist. Den typen av omordning kallas *cyklisk* eftersom den motsvarar att vi lägger de tre bokstäverna längs med en cirkel och snurrar på cirkeln. De tre sista involverar istället dessutom en *omkastning* av ordningen.

HÖGER- OCH VÄNSTERSYSTEM

Tripletterna $xyz, \;\; yzx, \;\; zxy$ bildar *högersystem*, medan tripletterna $xzy, \;\; zyx \;\; yxz$ istället bildar *vänstersystem*.

SKRUVREGELN

Tänk er att ni tar en vanlig (högergängad) skruv och skruvar den runt så att ni vrider från x-axeln till y-axeln position. I vilken riktning pekar då skruven? Jo, i z-riktningen. Samma funkar för högersystemen yzx och zxy. Men för t ex vänstersystemet yxz så kommer skruven vid vridning från y till x-positionen att peka i riktning av negativa z-axeln $-z$ istället.

Pythagoras sats

PYTHAGORAS SATS

Om vi tänker oss längden på vektorn som börjar i origo och slutar i punkten (x, y, z) så ges den av

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Anmärkning

Egentligen gäller ju Pythagoras sats för rätvinkliga trianglar i planet. så vi ser att avståndet till origo från punkten $(x, y, 0)$ blir

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Men då tänker man sig en ny rätvinklig triangel som bildas av origo, $(x, y, 0)$, och (x, y, z), och finner härur det angivna avståndet.

Planets ekvation i rummet

Vi minns ju räta linjens ekvation $y = kx + m$ från gymnasiet och envariabeln. Här är förstås inte alla linjer med, lodräta linjer kan vi inte skriva så. Isället kan vi använda den mer allmänna ekvationen $ax + by = c$, där a, b, c är konstanter, och inte både a och b är 0.

Plan i rummet

Ett plan i rummet beskrivs av en ekvation

$$Ax + By + Cz = D$$

för konstanter A, B, C, D, där någon av A, B, C är nollskild.

EXEMPEL PÅENKLA ANDRAGRADSYTOR

En cylinder

Betrakta ytan $x^2 + y^2 = 4$. Yta, säger ni? Det är ju en cirkel med radie 2! Men det blir en cylinderyta genom att vi kommer ihåg att vi har den extra variabeln z som kan vara vad som helst då ekvationen inte innehåller z. RITA!

En parabolisk cylinder

Betrakta nu istället ytan $y = x^2$ som vi känner igen som en parabel. Genom att z får variera fritt genererar parabeln en parabolisk cylinder. RITA!

SFÄRENS EKVATION

Sfärens ekvation

Sfärens ekvation är

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Härvid är (a,b,c) centrum och $r>0$ radien.

Exempel på en sfär

Betrakta lösningsytan till ekvationen

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=25.$$

Den är en sfär med radie 5 med centrum i punkten $(2,-3,7)$.

Men olikheter då?

EXEMPEL

Olikheten $z > 0$ tänker vi som uttryckande en del av rummet. Det blir alla punkter ovanför xy-planet!

EXEMPEL

Olikheten $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 9$, vad blir det för något? I xy-planet bildar lösningarna området utanför en cirkel, så i rummet blir det cylindrifierat. RITA!

Omgivningar i planet och i tre dimensioner

Sfäriska omgivningar

En (sfärisk) omgivning av en punkt P består av alla punkter Q som befinner sig på avstånd $< r$ för något fixt positivt tal r. Detta begrepp funkar även i planet och då talar vi om (cirkulära) omgivningar.

Mängder och topologi

Vad är en mängd?

En mängd har *element*. Vi ska kunna avgöra om något är ett element eller inte. Oftast tänker vi på elementen som punkter. T ex definierar en likhet eller en olikhet en mängd. Oftast ligger en mängd inbäddad i en annan mängd som täks som *universalmängd*. I denna universalmängd kan vi tala om *komplementet* till den givna mängden, som består av allt som inte ligger i mängden i fråga.

Inre och yttre punkter av mängder i rummet eller planet

En punkt i en mängd S i rummet eller planet är *inre* om den har en omgivning så att hela omgivningen ligger inuti S. På motsvarande vis är en punkt som inte ligger i S *yttre* om det finns en omgivning runt den som helt ligger utanför S.

Öppna och slutna mängder

Öppen mängd

En mängd S i rummet eller planet är *öppen* om den bara består av inre punkter.

Öppen mängd

En mängd S i rummet eller planet är *sluten* om komplementet består uteslutande av yttre punkter.

Vad är randen egentligen?

Randen till en mängd S i planet eller rummet består av alla punkter i planet/rummet som varken är inre eller yttre.

Så en öppen mängd innehåller ingen del av sin rand, medan en sluten mängd innehåller hela randen.

Lite exempel

Exempel

I planet, bestäm de inre och yttre punkterna samt randen till mängden $S = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 9\}$

Cylindriska koordinater

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy-planet samt bevarande av z-koordinaten kallas för *cylindriska koordinater*:

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z.$$

Exempel

Beskriv ytan som ges av (a) $z = r$, (b) $z = r\cos\theta$, (c) $\theta = \pi/2$.

Sfäriska (rymdpolära) koordinater

Sfäriska koordinater

Om $0 \leq \theta < 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$, och dessutom $R \geq 0$, så säger vi att $[R, \phi, \theta]$ är *sfäriska koordinater* i rummet om:

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \;\; y = R \sin \phi \sin \theta, \;\; z = R \cos \phi.$$

Anmärkning

ϕ=kolatitud, θ=longitud, R=radien.

Exempel

Om punkten beskrivs av $P = [2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ i sfäriska koordinater, var ligger då punkten?