F5

1

Ons 1/4 10-12
sal D1

Uppgifter:

12.5: 7, 11, 17, 21

12.6: 3, 5, 17, 19.

12.5. Kedjeregeln

12.6. Linjär approximation, differentierbarhet och differentialer.

12.5 Kedjeregeln

1 var. $\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\, g'(x).$

2 variabler?

$$z = f(x,y)$$
$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = f'_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f'_y(x(t), y(t))\, y'(t)}$$

②

Vi kan skriva sambandet som

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Men om $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases}$

så kan vi hålla s eller t konstant vid deriveringen ovan! Vi får alltså:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

Sammanfattande matrisekvation:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Ex. Om $z=\sin(x^2y)$, där $x=st^2$ och $y=s^2+\frac{1}{t}$, finn $\frac{\partial z}{\partial s}$ och $\frac{\partial z}{\partial t}$,

(a) genom att använda envariabelskedjeregeln

(b) genom att använda tvåvariabelsregeln.

Ex. Bestäm $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x^2y, x+2y)\right)=?$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x^2y, x+2y)\right)=?$$

Homogena funktioner

f är homogen av grad k om

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^k f(x_1, \ldots, x_n) \text{ för alla } t \geq 0.$$

Ex. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y)=x^2+xy-y^2.$

4

Eulers sats: part. der. m.a.p. var. nr i

Om f hom av grad k:

$$\sum x_i f_i'(x_1,\dots,x_n) = k f(x_1,\dots,x_n).$$

Bevis Derivera likheten

$f(tx_1,\dots,tx_n) = t^k f(x_1,\dots,x_n)$ m.a.p. t.

och sätt $t=1$.

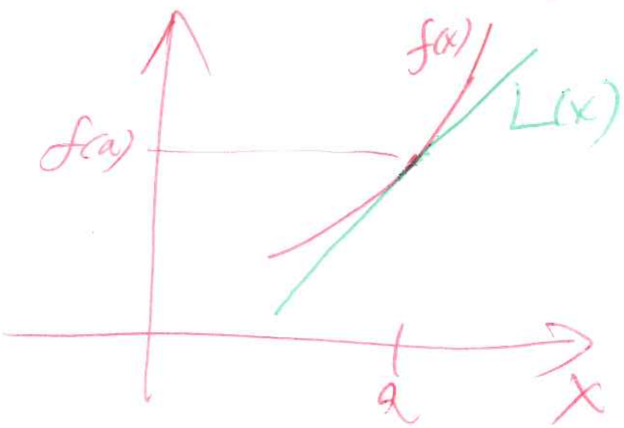
Ex. Om $f(x,y)$ är harmonisk löser Laplace ekv. så är även $f(x^2-y^2, 2xy)$ harmonisk.

Ex. Laplace ekv. i polära koordinater.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Linjär-approximation etc.

1 var: $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$
är bra approx för $x \approx a$.



Två variabler:

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b).$$

<u>DEF.</u> $f(x,y)$ är <u>differentierbar</u> i (a,b) om

$$\frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_1'(a,b) - kf_2'(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

då $(h,k) \to (0,0)$.

SATS (medelvärdestyp)

Om f_1' och f_2' är kont nära (a,b), och om h,k är nära 0, så finns θ_1, θ_2 med $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$, så att

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h f_1'(a+\theta_1 h, b+k) + k f_2'(a, b+\theta_2 k).$$

Differentialer

är användbara:

$$\boxed{\begin{aligned} dz = df &= \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \\ &= f_1'(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 + \dots + f_n'(x_1, \dots, x_n)\, dx_n. \end{aligned}}$$

Obs!! En sorts linjärapproximation

Kan vi tänka detta som!