Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-05-05, kl. 9.15–11.00.

5B1202 Diff & Trans, för F.

Kontrollskrivning 2!

1. Lös värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

givet att

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$$

för $0 < t < +\infty$, och att

$$u(x,0) = \sin x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(5)

Vi nyttjar variabelseparationsmetoden, och letar först efter lösningar

$$u(x,t) = X(x)\,T(t),$$

vilka skall lösa värmeledningsekvationen plus de första randvillkoren, dvs längs med linjerna $x = 0$ och $x = \pi$. Detta innebär att

$$X''\,T = X\,T',$$

dvs

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

för en lämplig kostant λ, och

$$X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Detta är lösbart om $\lambda = n$ är ett heltal, med lösningen

$$X = \cos(nx), \qquad T = e^{-n^2 t},$$

med lämpligt val av normaliseringskonstanter. Detta innebär att vi har basläsningarna

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\,\cos(nx),$$

för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; negativa värden på n ger inga ny lösningar. Vi skriver följaktligen vår sökta lösning u på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \, u_n(x,t),$$

enligt superpositionsprincipen. För $t = 0$ skall vi ha

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cos(nx) = \sin x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Vi skall alltså utveckla $\sin x$ i en cosinus-serie. Enligt BETA, s. 310, har vi identiteten

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

Detta måste vara cosinus-serien för $\sin x$ på intervallet $0 < x < \pi$. Följaktligen blir vår lösning

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 t} \cos(2nx).$$

---

2. Låt den komplexa variabeln $z = x + iy$ ge koordinaterna till planet. Lös Dirichlets problem, dvs finn den harmoniska funktion på enhetsskivan

$$|z|^2 = x^2 + y^2 < 1,$$

som har randvärden

$$u(e^{i\theta}) = \cos^2 \theta.$$

(5)

Enligt en kalkyl baserad på variabelseparation och superpositionsprincipen vet vi att den allmänna harmoniska funktionen kan skrivas (uttryckt i polära koordinater)

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \Big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \Big).$$

Nu vet vi att

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

vilket vi skriver som

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$$

Detta motsvarar $a_0 = 1$ och $a_2 = \frac{1}{2}$, medan alla andra a_n, b_n är lika med noll. Vi få således lösningen

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos(2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x^2 - y^2 \right).$$