Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-04-07, kl. 8.15–10.00.

5B1202 Diff & Trans, för F.

Kontrollskrivning 1!

1. Låt funktionen f ges av $f(x) = e^x$ på intervallet $-\pi < x < \pi$, och utvidga funktionen så den blir 2π-periodisk. Beräkna (de komplexa) Fourierkoefficienterna till f, och skriv upp motsvarande Fourierserie. Vad konvergerar Fourierserien mot i punkten $x = \pi$? Detta ger en intressant summationsidentitet, som du ska skriva upp i så förenklad form som möjligt. (6)

Fourierkoefficienterna ges av

$$2\pi\, c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^x\, e^{-inx}\, dx = \left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-in)\pi}}{1-in} - \frac{e^{-(1-in)\pi}}{1-in} = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{1-in},$$

och motvarande Fourierserie blir

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in}\, e^{inx}.$$

Ovanstående summa skall som vanligt uppfattas som gränsvr̈det av de symmetriska summorna

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N}.$$

Funktionen $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar i varje punkt, utom i språngpunkterna $\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$. Dessutom har funktionen vänster- och höger-derivator i dessa språngpunkter. Enligt sats vet vi då att Fourierserien konvergerar mot funktionen i all kontinuitetspunkter, och mot medelvärdet av värdet till vänster och höger i språngpunkter. Detta medelvärde blir för $x = \pi$

$$\frac{1}{2}\big(f(\pi^-) + f(\pi^+)\big) = \frac{1}{2}\big(e^{\pi} + e^{-\pi}\big).$$

Således blir, med istoppning av $x = \pi$ i Fourierserien,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-in} = \frac{1}{2}\big(e^{\pi} + e^{-\pi}\big).$$

Av symmetri har vi att

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1-in} = 1 + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1-in}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{1+n^2},$$

vilket ger då vi låter $N \to +\infty$ – i kombination med ovanstående – att

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi\, \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

2. Låt $\mathcal{E}$ beteckna vektorrummet av funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$ som uppspänns av funktionerna $\cos x$, $\sin x$, och $\sin 3x$. Finn minimum av

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + x - g(x)\right|^2 dx,$$

där g ligger i $\mathcal{E}$. Finn även den funktion g som ger minimum. (5)

Funktionerna $\cos x$, $\sin x$, och $\sin 3x$ är ortogonala mot varandra i rummet $L^2([-\pi, \pi])$. Vi beräknar först Fourier-koefficienterna a_1, b_1, och b_3 för funktionen $f(x) = 1 + x$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x) \cos x \, dx = 0,$$

och om vi nyttjar partiell integration erhålls även

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} x \sin x \, dx = 2,$$

och

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + x) \sin(3x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(3x) \, dx = \frac{2}{3}.$$

Vi väljer nu som minimerande g funktionen

$$g_0(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + b_3 \sin(3x) = 2 \sin x + \frac{2}{3} \sin(3x).$$

Detta är projektionen av funktionen $f(x) = 1 + x$ på det tre-dimensionella delrum av $L^2([-\pi, \pi])$ som $\mathcal{E}$ utgör, och enligt Linjär Algebra det rätta minimerande elementet. Enligt Pythagoras' sats gäller

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + x\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + x - g_0(x)\right|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_0(x)\right|^2 dx.$$

Vänster led är lätt att evaluera:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + x\right|^2 dx = \left[x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi + \frac{2\pi^3}{3},$$

och likaså den högraste delen av höger led:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|g_0(x)\right|^2 dx = 2^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x) \, dx = \frac{40\,\pi}{9}.$$

Svaret blir således

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|1 + x - g_0(x)\right|^2 dx = 2\pi + \frac{2\pi^3}{3} - \frac{40\,\pi}{9} = \frac{2\pi^3}{3} - \frac{22\,\pi}{9}.$$

3. Låt $\mathcal{E}$ beteckna vektorrummet av polynom av grad ≤ 2. Beräkna minimum av

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|e^x - p(x)\right|^2 dx,$$

där p ligger i $\mathcal{E}$. Finn även det polynom p som ger minimum. (4)

Vi observerar först att

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|e^x - p(x)\right|^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left|e^{\pi t} - p(\pi t)\right|^2 dt,$$

så om vi kallar $q(t) = p(\pi t)$ så letar vi efter det andragrads-polynom som är närmast $e^{\pi t}$ i rummet $L^2([-1,1])$. Här bör vi ha glädje av Legendre-polynomen

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

vilka är ortogonala, med

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Vi ortonormaliserar:

$$\widetilde{P}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \widetilde{P}_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \qquad \widetilde{P}_2(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2 - 1).$$

Det återstår att beräkna de inre produkterna:

$$\left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_0(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^{\pi t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{e^{\pi t}}{\pi}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi},$$

och de resterande två är mer komplicerade, i och med att man bör tillgripa partiell integration:

$$\left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_1(t)\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} e^{\pi t}\, t\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{\pi} - \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi^2}\right\},$$

$$\left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_2(t)\right\rangle = \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^{1} e^{\pi t}\,(3t^2 - 1)\, dt = \sqrt{\frac{5}{8}} \left\{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} - 2\,\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{\pi} + 2\,\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi^2}\right\}.$$

Det minimerande polynomet $q = q_0$ erhålls ur

$$q_0(t) = \left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_0\right\rangle \widetilde{P}_0(t) + \left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_1\right\rangle \widetilde{P}_1(t) + \left\langle e^{\pi t}, \widetilde{P}_2\right\rangle \widetilde{P}_2(t),$$

och det minimerande polynomet $p = p_0$ till det ursprungliga problemet fås ur

$$p_0(x) = q_0(x/\pi).$$

Beräkningen av minimum utförs analogt med uppgift 2 med hjälp av Pythagoras' sats.