Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2002-09-20, kl. 14.15–16.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 1!

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-1/2}dxdy,$$

om $D$ är cirkelskivan som definieras av $x^2+y^2 \leq 16$. (5)

---

Vi kör polära koordinater:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dxdy = rdrd\theta.$$

Då ges cirkelskivan $D$ av olikheterna

$$0 \leq r \leq 4, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

vilka beskriver en rektangel $D'$ i $(r,\theta)$-planet, och dessutom gäller att

$$x^2+y^2 = r^2.$$

Vi får således

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-1/2}dxdy = \iint_{D'} r^{-1}\, r\, dr\, d\theta = \iint_{D'} dr\, d\theta,$$

vilket representerar arean av rektangeln $D'$, dvs $4 \times 2\pi = 8\pi$. Detta är alltså svaret.

2. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma x^2y\,dx + xy^2\,dy$$

om $\Gamma$ är kurvan som som förbinder punkten $(0,0)$ med punkten $(1,1)$ längs med parabeln $y = x^2$. (5)

---

Vi parametriserar kurvan $\Gamma$:

$$x = t, \quad y = t^2, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Då blir

$$dx = dt, \quad dy = 2t\,dt,$$

och stoppar vi in detta i linjeintegraler erhåller vi

$$\int_\Gamma x^2y\,dx + xy^2\,dy = \int_0^1 \left(t^4\,dt + t^5\,2t\,dt\right) = \int_0^1 \left(t^4 + 2t^6\right)dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{17}{35},$$

vilket utgör svaret.

3. Beräkna ytintegralen

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

där $d\sigma$ står för ytelementet på ytan $\Sigma$. Här är $\mathbf{F}$ vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x, 2y, 3z),$$

och $\Sigma$ randytan till den kropp som ges av att olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \qquad z \geq 0.$$

Normalen $\mathbf{n}$ är den enhetsnormal mot ytan som riktas utåt. (5)

---

Eftersom ytan utgör randytan till en kropp är den sluten. Därför kan vi tillämpa Gauss sats (divergenssatsen), för att erhålla

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz,$$

om $K$ betecknar kroppen som innesluts av $\Sigma$. Vi r̈knar på:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Detta betyder att svaret kommer att ges av talet 6 gånger kroppen $K$'s volym. Volymen av en sfär med radie $R$ ges av formeln

$$\frac{4\pi}{3} R^3,$$

men i vårt fall har vi en halvsfär med radie $\sqrt{9} = 3$, så vi får volymen

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} 3^3 = 18\pi.$$

Svaret blir således $6 \times 18\pi = 108\pi$.