Introduktion

Trigonometri är den gamla vetenskapen om geometriska objekt som trianglar, cirklar m.m. Vi ska här fokusera på de trigonometriska **funktionerna** och deras grafer samt friska upp formelkunskaperna genom att lösa en del ekvationer med de trigonometriska funktionerna sinus och cosinus inblandade.
Två saker är här viktiga:

- Vinkelmåttet **radianer** är det som används i samband med trigonometriska funktioner. Man behöver alltså nöta in att exempelvis 30° och 60° svarar mot $\pi/6$ resp. $\pi/3$. Dessutom bör man påminna sig de kända värdena på sinus och cosinus för dessa vinklar.
(Se de två trianglarna i Översikten.)

- De trigonometriska ekvationerna har oftast oändligt många lösningar. En blick på graferna förklarar varför. Det är viktigt att man lär sig hålla reda på dessa lösningar. Metoden är att man använder en parameter, ex.vis n som får stå för alla hela tal :
$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 6 skall du kunna:

- obehindrat växla mellan grader och radianer som vinkelmått.
- lösa de grundläggande trigonometriska ekvationerna
$\sin x = \sin A$ och $\cos x = \cos A$
samt hantera de oändligt många lösningarna.
- lösa en något större klass av ekvationer med hjälp av de vanligaste trigonometriska formlerna.
- känna igen graferna för sinus och cosinus samt förstå effekten på graferna av ändringar i amplitud och frekvens.

Exempel 1

Lös följande ekvation:

$$(*) \qquad \cos 4x = 1/2$$

$$\begin{aligned} (1) \qquad \cos 4x &= 1/2 = \cos(\pi/3) \\ (2) \qquad 4x &= \pm\pi/3 + n2\pi \\ (3) \qquad x &= \underline{\pm\pi/12 + n\pi/2} \end{aligned}$$

Lösningen här bygger på att man känner till en vinkel, vars cosinus är 1/2.

Denna vinkel, uttryckt i radianer, visar sig i (1).

I övrigt skall man komma ihåg '±' som förekommer i lösningen till ekvationer av typ cos x = cos A.

Parameteren n står här (och i alla andra lösningar av trig.ekvationer) för alla heltal, dvs
n = 0, ± 1, ±2, ...

Exempel 2

Lös följande ekvation:	
$$(*) \qquad \sin 4x = \cos(2x + \pi/7)$$	Det är fördelaktigt att ha ekvationen i formen cos A = cos B eller sin A = sin B . Här väljs cos A = cos B.
$$\begin{aligned} &(1) & \cos(\pi/2 - 4x) &= \cos(2x + \pi/7) \\ &(2) & \cos(4x - \pi/2) &= \cos(2x + \pi/7) \\ &(3) & 4x - \pi/2 &= \pm(2x + \pi/7) + n2\pi \\ &(4+) & 4x - \pi/2 &= 2x + \pi/7 + n2\pi \\ & & 2x &= 9\pi/14 + n2\pi \\ & & x &= \underline{9\pi/28 + n\pi} \\ &(4-) & 4x - \pi/2 &= -2x - \pi/7 + n2\pi \\ & & 6x &= 5\pi/14 + n2\pi \\ & & x &= \underline{5\pi/84 + n\pi/3} \end{aligned}$$	Steget (1) -> (2) är egentligen inte nödvändigt. Om man hoppar över det och går direkt till en ekvation motsvarande (3) får man samma lösningar. I (4+) utgår man från (3) med plustecken i högerledet och i (4-) från samma ekvation med minustecken. Alla dessa lösningar sammanställs till den totala lösningen som här definieras av de två understrukna raderna.

Exempel 3

Lös följande ekvation: $(*) \qquad \sin 2x = \sin x$ $(1) \qquad 2\sin x \cos x = \sin x$ $(2) \qquad 2\sin x \cos x - \sin x = 0$ $(3) \qquad 2\sin x(\cos x - 1/2) = 0$ $(4.1) \qquad \sin x = 0$ $x = \underline{n\pi}$ $(4.2) \qquad \cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$ $x = \underline{\pm\pi/3 + n2\pi}$	Här fordras kännedom om formeln för sin 2x som används i steget (*) -> (1). **Varning!**: Det är lätt gjort att förkorta bort sin x från bägge leden i (1) och sedan glömma de rötter som svarar mot sin x = 0. Ett sätt att undvika den fällan är att flytta över alla termer till vänsterledet och sedan faktorisera. Till slut tar man fram nollställena för varje faktor för sig. Kom ihåg de oändligt många lösningarna som definieras av heltalsvariabeln n.

Exempel 4

Lös följande ekvation: $$(*) \qquad \cos 2x = 11\cos x + 5$$ $$(1) \qquad \cos 2x - 11\cos x - 5 = 0$$ $$(2) \qquad 2\cos^2 x - 1 - 11\cos x - 5 = 0$$ $$(3) \qquad 2\cos^2 x - 11\cos x - 6 = 0$$ Sätt $t = \cos x$ $$(4) \qquad t^2 - (11/2)t - 3 = 0$$ $$(5) \qquad t = 11/4 \pm \sqrt{121/16 + 48/16}$$ $$(6) \qquad t = 11/4 \pm 13/4$$ $$(7) \qquad t_1 = -1/2, \qquad t_2 = 6$$ $\cos x = t_2 = 6$, omöjligt, slopas. $\cos x = t_1 = -1/2 = \cos(2\pi/3)$ ger $x = \underline{\pm 2\pi/3 + n2\pi}$.	Den här ekvationen går inte att överföra till någon av grundformerna sin A = sin B eller cos A = cos B. I stället kan man se att ekvationen kan skrivas om så att endast cos x ingår. Detta är möjligt om man väljer den av de tre alternativa formlerna för cos 2x som enbart innehåller cos x: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Därefter ger substitutionen t = cos x en andragradsekvation som löses på vanlöigt sätt. Notera att alternativet cos x = 6 slopas eftersom cosx alltid är mindre än eller lika med 1.

Övning 1

Bestäm exakta värden för:

(a) $\sin(3\pi/2)$

(b) $\sin(7\pi/4)$

(c) $\sin(-2\pi/3)$

(d) $\sin(13\pi/6)$

(e) $\cos(7\pi/2)$

(f) $\cos(5\pi/6)$

(g) $\cos(3\pi/4)$

(h) $\cos(-13\pi/3)$

Det här är övningar dels på radianer och dels på konsten att hitta hanterligt små vinklar som har samma sinus- eller cosinusvärde som de givna.

Man bör ha viss nytta av att repetera de vanliga rätvinkliga trianglarna med kända vinklar i Översikten.

Också formlerna i avsnitten 2 och 3 (perioder och symmetrier) på trigonometriska formelbladet bör vara aktuella.

Övning 2 Lös ekvationerna: $(a) \quad \sin 3x = \sin(\pi/6)$ $(b) \quad \sin 2x = \cos(\pi/7)$ $(c) \quad \cos 3x = \cos(x - \pi/6)$ $(d) \quad \sin 11x = \sin(3x - \pi/6)$	Det här är trigonometriska ekvationer som kan överföras till formen sin A = sin B eller cos A = cos B. Dessa visas bl.a. i Exempel 1-2.

Övning 3

Lös ekvationerna:

$$(a) \qquad 2\cos 2x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$(b) \qquad \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$$

$$(c) \qquad \sin 2x - 4\cos x = 0$$

$$(d) \qquad \cos 2x - \cos^2 3x = 2 + \sin^2 3x$$

Dessa ekvationer kan antingen lösas genom faktorisering (som i Ex. 3) eller med substitution (som Ex. 4)

I (d) finns det dock en genväg...

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a-e, lösningar .

Hänvisningarna här gäller nummer på använda formler i Formelsamlingen

$$(a) \quad \sin(3\pi/2) = \sin(3\pi/2 - 2\pi) = \sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2) = \underline{-1}$$

(a): 2a*, 3d

$$(b) \quad \sin(7\pi/4) = \sin(7\pi/4 - 2\pi) = \sin(-\pi/4) = -\sin(\pi/4) = \underline{-\sqrt{2}/2}$$

(b): 2a*, 3d

$$(c) \quad \sin(-2\pi/3) = -\sin(2\pi/3) = -\sin(\pi - 2\pi/3) = -\sin(\pi/3) = \underline{-\sqrt{3}/2}$$

(c): 3d, 3a

$$(d) \quad \sin(13\pi/6) = \sin(13\pi/6 - 2\pi) = \sin(\pi/6) = \underline{1/2}$$

(d): 2a*

$$(e) \quad \cos(7\pi/2) = \cos(7\pi/2 - 4\pi) = \cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = \underline{0}$$

(e): 2b*, 3e

Övning 1f-h, lösningar .

$$(f) \qquad \cos(5\pi/6) = -\cos(\pi - 5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = \underline{-\sqrt{3}/2}$$

$$(g) \qquad \cos(3\pi/4) = -\cos(\pi - 3\pi/4) = -\cos(\pi/4) = \underline{-\sqrt{2}/2}$$

$$(h) \qquad \cos(-13\pi/3) = \cos(-13\pi/3 + 4\pi) = \cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = \underline{1/2}$$

(f): 3b

(g): 3b

(h): 2b*, 3e

*) Av formlerna 2a och 2b följer att man får addera pi·(ett jämnt tal) till variabeln x i vänsterledet och att detta jämna tal får vara negativt.

Formelsamlingen

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

$$(a) \qquad \sin 3x = \sin(\pi/6)$$

$$(1A) \qquad 3x = \pi/6 + n2\pi$$

$$(1B) \qquad 3x = \pi - \pi/6 + 2n\pi$$

$$(2A) \qquad x = \underline{\pi/18 + 2n\pi/3}$$

$$(2B) \qquad x = \underline{5\pi/18 + 2n\pi/3}$$

En enkel övning på en ekvation av typ
sinA = sin B.

Men kom ihåg de två fallen i lösningen (här A och B), som skiljer sig från motsvarande cosinus-ekvation.

Övning 2b, lösning .

$$(b) \qquad \sin 2x = \cos(\pi/7)$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & \sin 2x = \sin(\pi/2 - \pi/7) \\
(2) & \sin 2x = \sin(5\pi/14) \\
(3A) & 2x = 5\pi/14 + 2n\pi \\
(3B) & 2x = \pi - 5\pi/14 + 2n\pi \\
(4A) & x = \underline{5\pi/28 + n\pi} \\
(2b) & x = \underline{9\pi/28 + n\pi}
\end{array}$$

Här hade man lika gärna kunnat göra om sinus i vänsterledet till cosinus på samma sätt som man i högerledet gjort om cosinus till sinus.

Övning 2c, lösning . $(c) \qquad \sin 2x - 4\cos x = 0$ $(1) \qquad 2\sin x\cos x - 4\cos x = 0$ $(2) \qquad 2\cos x(\sin x - 2) = 0$ $(3) \qquad \cos x = 0 \text{ och } \sin x = 2$ $(4') \qquad \cos x = 0 \text{ ger } x = \underline{\pi/2 + n\pi.}$ $(4'') \qquad \sin x = 2 \text{ ger inga lösningar.}$	I ekvationer av typ cos A = cos B uppstår två fall som svarar mot olika texken: + eller -. Detta skiljer sig från motsvarande två fall för ekvationen sin A = sin B. Egentligen blir det enklare att handskas med cosinus-ekvationerna.

Övning 2d, lösning . $(d) \qquad \sin 11x = \sin(3x - \pi/6)$ $(1A) \qquad 11x = 3x - \pi/6 + 2n\pi$ $(1B) \qquad 11x = \pi - (3x - \pi/6) + 2n\pi$ $(2A) \qquad 8x = -\pi/6 + 2n\pi$ $(2B) \qquad 14x = 7\pi/6 + 2n\pi$ $(3A) \qquad x = \underline{-\pi/48 + n\pi/4}$ $(3B) \qquad x = \underline{\pi/12 + n\pi/7}$	Det kan vara värt att notera den sista divisionen (här från 2A till 3A med 8 resp. från 2B till 3B med 14) måste utföras på alla termer i högerledet, även den som innehåller heltalsvariabeln n. Det är ett ganska vanligt slarvfel att den termen glöms bort.

Översikt 6

Radianer

Vinkelmåttet radianer är i matematiska sammanhang bättre än grader, särskilt när man sysslar med de trigonometriska **funktionerna** och deras **grafer**.

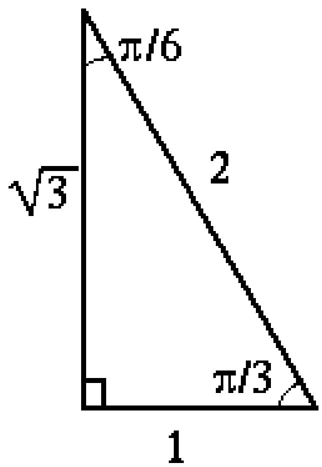
Här är en liten översättningslista:

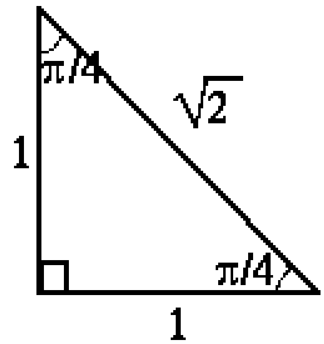
$$
\boxed{\begin{aligned}
\pi/3 &= 60^\circ\\
\pi/2 &= 90^\circ\\
\pi &= 180^\circ\\
2\pi &= 360^\circ
\end{aligned}}
$$

Sinus- och cosinusfunktionerna (Översikt 6 forts.)

Dessa funktioner lär man sig bäst genom att använda dem i praktiken.
Här löser vi främst ekvationer.

- **Graferna** är viktiga. Titta på de tre graferna längst ned på den här sidan.
- **Formler** är också bra att kunna. åtminstone en del.
  Länk till en kommenterad formelsamling finns överst till höger.
- En del **trigonometri** bör kunnas, framförallt bör man vara förtrogen med följande två trianglar som innehåller information om sinus- och cosinusvärden för de kända vinklar som ingår i trianglarna.





Ekvationslösning (Översikt 6 forts.)

De två grundläggande ekvationerna som studeras här är:

(1) sin x = sin a , med lösning:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + n2\pi \\ x &= \pi - a + n2\pi \end{aligned}}$$

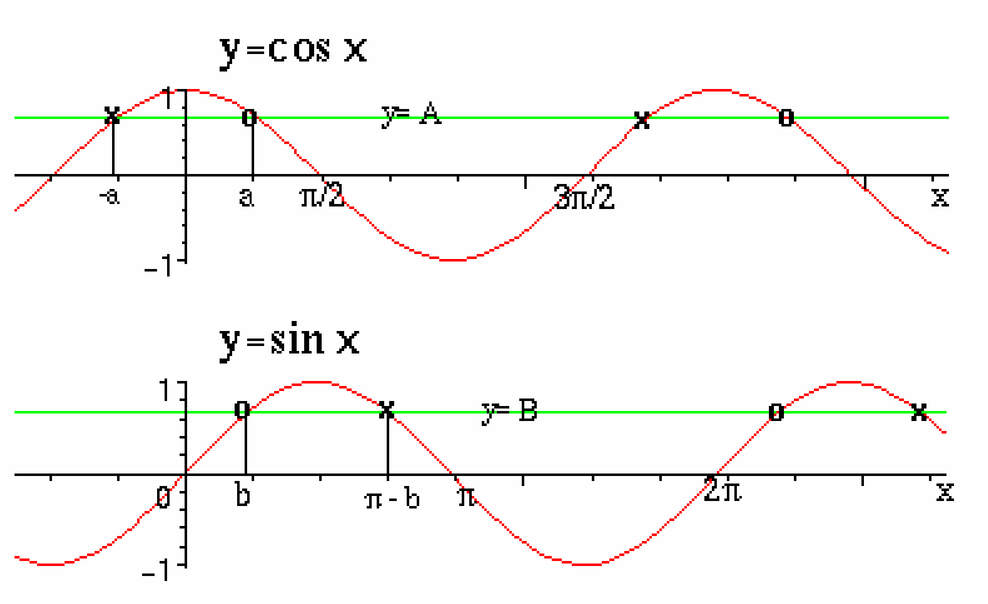
(2) cos x = cos a , med lösning:

$$\boxed{x = \pm a + n2\pi}$$

Variabeln *n* i lösningarna antar värdena n = 0, ±1, ±2, ... ,
vilket indikerar att ekvationerna har oändligt många lösningar.
Detta framgår också av första grafen nedan, där också detta kommenteras närmare.

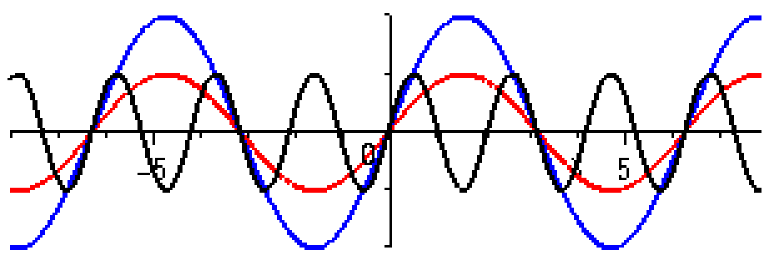
I övrigt får man här också tillfälle att öva in formler, genom att lösa de ekvationer (ex.vis Övning 3) som fordrar någon **substitution**, oftast t= sin x eller t= cos x.
Ekvationen behöver normalt formas om med någon trigonometrisk formel innan det står klart vilken substitution som är lämplig.
Det visar sig att formlerna 5 (a) - (d) (se Formelsamlingen) är särskilt nyttiga i dessa sammanhang.

Grafer (Översikt 6 forts.)



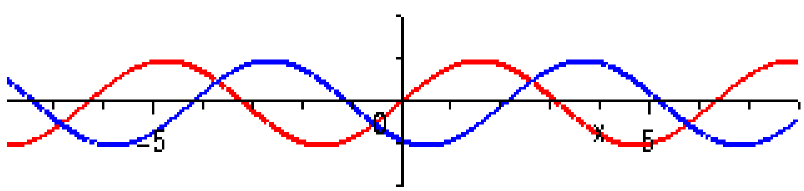
Här syns graferna för cosinus och sinus.
Speciellt kan man studera de oändligt många lösningarna till ekvationerna cos x = A och sin x = B.

Försök hitta i graferna de två olika fallen i lösningsformlerna ovan för sinus- resp. cosiniusekvationen. Var och ett av dessa fall svarar mot en svit av oändligt många lösningar med det konstanta mellanrummmet 2pi.
Dessa två sviter återfinns som o-punkter och x-punkter i graferna.



y = sin x , y = 2sin x , y = sin 3x ,

Här är den röda kurvan grafen för y=sin x.
Kurvorna för y=2sin x (blå) och y=sin 3x (svart) utmärker sig av dubbelt så stor **amplitud** resp. tre gånger så stor **frekvens**.



y = sin x , y = sin(x-a) ,

Här är den röda kurvan y = sin c.

Den blå kurvan är **fasförskjuten** a längdenheter åt höger.

Detta svarar mot kurvformeln
y = sin(x-a).

Trigonometriska formler

1. Trigonometriska ettan

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. Perioder

(a) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

(b) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(c) $\tan(x + \pi) = \tan x$

3. Symmetrier m.m.

(a) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

(c) $\tan(\pi - x) = -\tan x$

(d) $\sin(-x) = -\sin x$

(e) $\cos(-x) = \cos x$

(f) $\tan(-x) = -\tan x$

(g) $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

(h) $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

(i) $\tan(\pi/2 - x) = \cot x$

Kommentarer

Formlerna är huvudsakligen sin- och cos-formler.
Några enstaka tan-formler är dock också medtagna.

1. Trigonometriska ettan.
   Den lär man sig först.
2. \- 3. Dessa formler lär man sig överlägset bäst genom att memorera graferna för sinus och cosinus.

   Där finns faktiskt all information om symmetrier och perioder nedlagda.

4. Additionsformler

(a) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

(b) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

(c) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(d) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

5. Dubbla och halva vinkeln

(a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

(c) $\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$

(d) $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$

6. Produktformler

(a) $\sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$

(b) $\cos x \cos y = (\cos(x - y) + \cos(x + y))/2$

(c) $\sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2$

4. Bra formler.Lär dig exempelvis (a), ordentligt. Då får du också en idé om hur de andra formlerna ser ut. Blir du osäker på något tecken kan du alltid pröva genom att sätta in några kända vinklar.

5. Dessa är mycket användbara. De dyker ofta upp i sambad med ekvationer, integraler och sådant.
   Rekommenderas för inlärning.

6. Dessa produktformler bör man känna till existensen av. Och veta var man får tag på dem. Bra också om man vet att de följer ur formlerna 4.
   Men det är OK om man inte kan alla detaljer.