Introduktion

Exponentialfunktionen e^x och logaritmfunktionen *ln x* är bland de viktigaste och vanligast förekommande elementära funktionerna. Här måste potenslagarna och logaritmlagarna läras in (se Översikten). Man säger att e^x och *ln x* är varandras inverser vilket betyder att man först använder den ena funktionen och sedan den andra är man tillbaks till utgångsläget:

$$ln(e^x) = x \quad \text{och} \quad e^{ln\,x} = x.$$

Här övar vi på logaritmerna främst i samband med ekvationslösning.
Man lär sig snabbt att logaritmen (*ln*) är ett utmärkt verktyg att använda på produkter av exponentialuttryck. Om bägge led i ekvationen är av den typen är det värt att ta *ln* för båda leden för att förenkla ekvationen.

Ex: från $2 \cdot e^{-x} = 3^x$ till $ln2 - x = xln3$.

Däremot fungerar inte logaritmer på mer än en term.
Ex: $2 \cdot e^{-x} = 3^x + 2^x$ Här fungerar inte logaritmen på högerledet eftersom det inte finns någon förenklande omformning för uttryck av typ $ln(A+B)$.

Slutligen är det viktigt att känna igen funktionernas grafer.
Av grafen för *ln x* framgår bl.a. att *ln x* är definierat endast för $x > 0$.
(Se Översikten).

Målsättning:

Efter studium av Avsnitt 5 skall du kunna:

- obehindrat räkna med exponenter och logaritmer.
- använda logaritmer för att lösa exponentekvationer.
- känna igen graferna för exponential- och logaritmfunktionerna samt inse att de är varandras spegelbilder i linjen $y=x$.

>

Exempel 1

Lös följande ekvation:

$$(*) \qquad 3^x = 2 \cdot 10^{-x}$$

$$(1) \qquad \ln 3^x = \ln \left(2 \cdot 10^{-x}\right)$$

$$(2) \qquad x \ln 3 = \ln 2 + (-x) \ln 10$$

$$(3) \qquad x(\ln 3 + \ln 10) = \ln 2$$

$$(4) \qquad x = \frac{\ln 2}{\ln 30}$$

Exemplet visar ett fall där det lönar sig att ta logaritmen för bägge led.

Med hjälp av logaritmlagarna

ln ab = ln a + ln b och
ln a^s = s ln a

lyckas man överföra ekvationen till en förstagradsekvation i *x*.

En logaritmlag används också i sista steget före svaret.

Men kvoter av logaritmer går normalt inte att förenkla.

Observera att operationen att ta en logaritm för bägge led inte introducerar några nya falska rötter.
Därför behöver man inte pröva den erhållna roten i (*).

Exempel 2

Lös följande ekvation: $(*) \qquad 4^x + 3 \cdot 2^x = 18$ Logaritmer fungerar inte p.g.a plustecknet. Gör istället en substitution: Sätt $t = 2^x$. Man får $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ Alltså: $(1) \qquad t^2 + 3t - 18 = 0$ $(2) \qquad t = -3/2 \pm \sqrt{9/4 + 18}$ $(3) \qquad t = -3/2 \pm 9/2$ $t = 3$ ger $2^x = 3$. $x \ln 2 = \ln 3$. $x = \ln 3 / \ln 2$. $t = -5$ ger ingen rot x eftersom 2^x aldrig < 0. **Svar:** $x = \ln 3 / \ln 2$.	Som påpekas fungerar det inte att ta logaritmer för båda leden här. Det finns nämligen ingen förenklande omskrivning av ln(a+b). Notera istället att substitutionen $t = 2^x$ fungerar, eftersom 4^x kan skrivas $(2^x)^2 = t^2$ Man får en rot t=-5 för den ekvation i t som erhålles efter substitutionen. Här måste man dock slopa denna rot eftersom $2^x = -5$ inte ger någon lösning för x. Och det var x-lösningar vi var intresserade av. Notera också att logaritmerna kommer tillbaka då det gäller att bestämma x ur $2^x = 3$.

Övning 1

Lös ekvationerna:

(a) $$13e^x = 2^{-x}$$

(b) $$3ae^{3x} = 2^{bx}$$

(c) $$e^{2x} - 6e^x = 16$$

Två av dessa uppgifter lämpar sig att behandla med logaritmer.

I det tredje fallet gör man en lämplig substitution

Övning 2

Lös ekvationerna:

(a) $$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

(b) $$(1/2)\ln(2x+2) = \ln(x-3)$$

(c) $$2^{-x^2} = 4e^{2x}$$

Här gör man om de två första ekvationerna till ekvationer av typ
ln A = ln B ,
med hjälp av logaritmlagar.

Därefter gör man som med logaritmekvationerna i Avsnitt 4.

Kom ihåg:

ln A är definierat endast om A > 0.

Lösn. Övning 2.

Övning 1. Lösningar.

Övning 1a, lösning .

$$(*) \qquad 13e^x = 2^{-x}$$

$$(1) \qquad \ln(13e^x) = \ln(2^{-x})$$

$$(2) \qquad \ln(13) + x = -x\ln 2$$

$$(3) \qquad x(1+\ln 2) = -\ln(13)$$

$$\textbf{Svar: } x = -\frac{\ln(13)}{1+\ln 2}$$

Bra att veta här:

$\ln(e^x) = x$

$\ln(a^x) = x \ln a$

Övning 1b, lösning .

$$(*) \qquad 3ae^{3x} = 2^{bx}$$

$$(1) \qquad \ln(3ae^{3x}) = \ln(2^{bx})$$

$$(2) \qquad \ln(3a) + 3x = bx\ln 2$$

$$(3) \qquad \ln(3a) = x(b\ln 2 - 3)$$

$$\textbf{Svar: } x = \frac{\ln(3a)}{b\ln 2 - 3}$$

ln(3a) kan naturligtvis

också: skrivas

ln 3 + ln a.

Övning 1c, lösning .	
(∗) $e^{2x} - 6e^x = 16$ Sätt $t = e^x$ (då blir $e^{2x} = t^2$). (1) $t^2 - 6t - 16 = 0$ (2) $t = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5 = 8$ resp. -2. (3a) $t = e^x = 8$ ger $x = \ln 8 = 3\ln 2$ (3b) $t = e^x = -2$ ger ingen lösning eftersom $e^x > 0$. **Svar:** $x = 3\ln 2$	Ingen idé att ta ln för bägge led här. Minustecknet i vänsterledet hindrar det. ln 8 = ln 2^3 = 3 ln 2

Övning 2. Lösningar.

Övning 2a, lösning .

$$(*) \qquad \ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

$$(1) \qquad \ln x(x+4) = \ln(2x+3)$$
$$(2) \qquad x(x+4) = 2x+3$$
$$(3) \qquad x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(4) \qquad x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 = 1 \text{ resp. } -3.$$

Prövning:
$x_1 = 1$ i (*): $VL = \ln 1 + \ln 5 = \ln 5$, $HL = \ln 5$. Stämmer.
$x_2 = -3$ i (*): $VL = \ln(-3) + \ln 1$, ej definierat pga $\ln(-3)$. Slopas.

Svar: $x = 1$

Det är egentligen bara steget från (*) till (1) som är nytt här.

Från och med (1) gäller samma lösningsmetod somi Avsnitt 4.

Kom alltså ihåg prövningen i slutet.

Övning 2b, lösning .

$$(*) \qquad (1/2)\ln(2x+2) = \ln(x-3)$$

$$(1) \qquad \ln(2x+2) = 2\ln(x-3)$$

$$(2) \qquad \ln(2x+2) = \ln(x-3)^2$$

$$(3) \qquad 2x+2 = (x-3)^2$$

$$(4) \qquad 2x+2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(5) \qquad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(6) \qquad x = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3 = 7 \text{ resp. } 1.$$

Prövning:

$x_1 = 7$ i (*): $VL = (1/2)\ln 16 = \ln(16^{1/2})$
$= \ln 4, \quad HL = \ln 4.$ Stämmer.
$x_2 = 1$ i (*): $HL = \ln(-2)$. ej definierat.
Slopas.

Svar: $x = 7$

Målsättningen är att få ekvationen på formen :
ln A = ln B och därefter lösa ekvationen A = B.

Notera hur tvåan framför en av logaritmerna fås att försvinna m.hj.a $s \ln a = \ln a^s$. ((1) -> (2)).

I prövningen skall man komma ihåg existensområdet för logaritmer:

ln A är definierad endast om A > 0.

Övning 2c, lösning .

$$(*) \qquad 2^{-x^2} = 4e^{2x}$$

$$(1) \qquad \ln\left(2^{-x^2}\right) = \ln\left(4e^{2x}\right)$$

$$(2) \qquad -x^2 \ln 2 = \ln 4 + 2x$$

$$(3) \qquad x^2 + 2x/\ln 2 + \ln 2^2/\ln 2 = 0$$

$$(4) \qquad x^2 + 2x/\ln 2 + (2\ln 2)/\ln 2 = 0$$

$$(5) \qquad x^2 + 2x/\ln 2 + 2 = 0$$

Lösning av andragradsekvationen (5) ger

Svar: $x_1 = -\dfrac{1}{\ln 2} + \sqrt{\dfrac{1}{\ln^2 2} - 2}$

$x_2 = -\dfrac{1}{\ln 2} - \sqrt{\dfrac{1}{\ln^2 2} - 2}$

Samma lösningstyp som i Övning 1a - b.

Här får man doch en andragradsekvation som kan verka litet jobbigare.

Observera att rötterna är reella eftersom uttrycket under rottecknet är positivt:

Eftersom ln 2 < 0.7,

blir $1/(\ln 2)^2 - 2 >$

$1/0.49 - 2 > 0$.

Översikt 5

Potensregler.

Följande grundläggande potensregler är startpunkten för detta avsnitt:

$$\boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}} \qquad \boxed{(a^b)^c = a^{bc}}$$

Ex 1: $2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$. Ex 2: $8^4 = (2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Logaritmer och exponentialfunktioner

Placerar man variabeln x i exponenten uppstår **exponentialfunktioner**:
a^x med det vanligaste specialfallet e^x, där e = 2.71828182845904523... är ett viktigt tal i det här sammanhanget.

Logaritmerna $\log_a x$ och $\log_e x$ = **ln x** definieras som **inverser** till exponentialfunktionerna, dvs de neutraliserar effekten av en exponentialfunktion genom att återställa funktionsvärdet till det ursprungliga värdet x:
(Se också grafen nedan för att få en illustration av inversbegreppet).

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \qquad \boxed{e^{\ln x} = x}$$

Ett annat sätt att uttrycka samma sak är:

ln x är det tal som *e* skall upphöjas till för att man skall få x

(Översikt 5 forts.)

Motsvarigheten till potenslagarna ovan är:

$$\boxed{\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b} \qquad \boxed{\ln a^s = s \ln a}$$

Observera också den viktiga inskränkningen i definitionsmängden:

ln x är definierad endast för x > 0.

Ekvationslösning

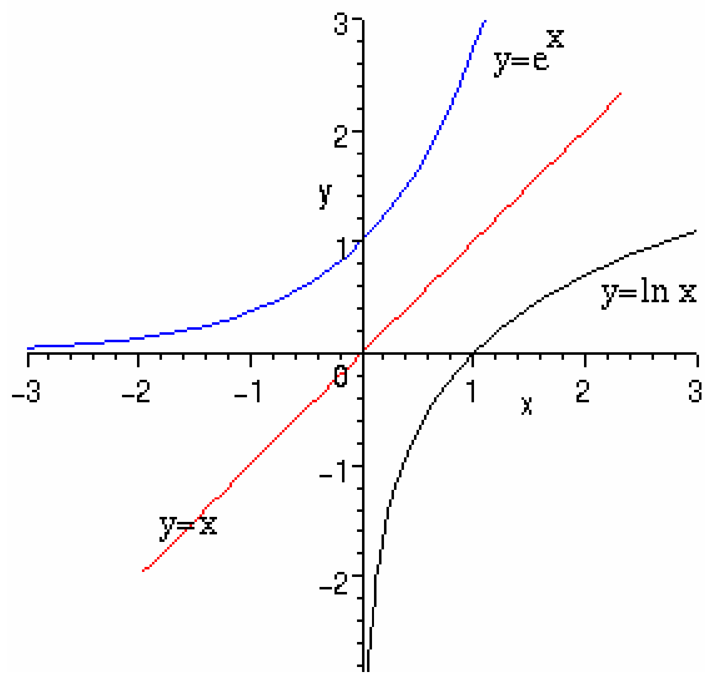
Här använder vi logaritmerna (dvs. ln x) i första hand som hjälpmedel att lösa vissa ekvationer. Det gäller framförallt ekvationer med exponentialfunktioner (där alltså variabeln x förekommer i exponenterna) och där det finns högst en term i vänster- och högerledet.
Exempel på sådana ekvationer är Exempel 1 samt Övning 1a,1b och 2c.

Här förekommer också ekvationer som kan återföras till polynomekvationer genom en **substitution**. (Exempel 2, Övning 1c.)

Slutligen finns också logaritmekvationer son via logaritmlagarna kan återföras till formen
ln A = ln B, som sedan kan behandlas med metoden i Avsnitt 4. (Övning 2a och 2b).

Grafer

(Översikt 5 forts.)



Här visas graferna för e^x- och ln-funktionerna i samma koordinatsystem. Man ser tydligt att de är varandras spegelbild i linjen y=x.

Förklaring till speglingen:

Varje punkt (x,y) är spegelpunkt till punkten (y,x) i linjen y=x. Dessa punkter får man från varandra genom att byta mellan x och y.

Byter man mellan x och y i relationen $y = e^x$ får man $x = e^y$. Så dessa båda kurvor ($y = e^x$ och $x = e^y$) är varandras spegelbilder i samma linje.

Men definitionen av ln x ($x = e^{\ln x}$)) visar att $x = e^y$ utgör samma relation som y = ln x.
(sätt in y = ln x i $x = e^y$ och man får x=x). Kurvan $x = e^y$ är alltså densamma som kurvan y = ln x.