

Spelteori, föreläsning 5

Generella spel och Nashjämvikter

Föreläsare Johan Karlander
Anteckningar gjorda av Markus Kirsten

12 april 2005

Slutet av kombinatoriska spel

Operationer på kombinatoriska spel

- Addition: $G_1 + G_2$ tolkas som att G_1 och G_2 spelas bredvid varandra.
- Negation: $-G$ tolkas som G där L och R har bytt positioner.
- $= 0$: $G = 0$ betyder att II vinner
Påstående $G + (-G) = 0$.
- > 0 : $G > 0$ betyder att L alltid vinner
- < 0 : $G < 0$ betyder att R alltid vinner
- $G > H$: betyder att $G + (-H) > 0$
- $G = H$: betyder $G + (-H) = 0$
- $G \geq H$: betyder att $G > H$ eller $G = H$

Tvåpersoners icke-nollsummespel

Notation:

- I har m rena strategier, utdelningen ges av a_{ij}
- II har n rena strategier, utdelningen ges av b_{ij}
- Utdelningen kan sammanfattas i ett matriselement (a_{ij}, b_{ij})

Exempel: Battle of the Sexes

$$\begin{pmatrix} (4, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 4) \end{pmatrix}$$

I är man, II är kvinna och strategierna är "gå på fotboll" och "gå på opera".
Det lönar sig alltså för båda om de kan enas om en strategi.

Visar på 4 avvikelser från nollsummespel:

1. Det lönar sig att tala om vad man tänker göra.
2. Det lönar sig att förhandla om en gemensam strategi.
3. Om två par rena strategier $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ är jämviktpunkter är inte alltid $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1)$ en jämviktpunkt.
4. Om $\bar{x}, \bar{y}$ är blandade maxminstrategier för I, II är inte alltid $(\bar{x}, \bar{y})$ en jämviktpunkt.

Definition: $\bar{x}, \bar{y}$ är blandade strategier

$$\begin{aligned} M_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j \\ M_2(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i,j} x_i b_{ij} y_j \end{aligned}$$

Nashjämvikt: Ett par $(\bar{x}, \bar{y})$ så att $M_1(\bar{x}', \bar{y}) \leq M_1(\bar{x}, \bar{y})$ och $M_2(\bar{x}, \bar{y}') \leq M_2(\bar{x}, \bar{y})$ för alla $\bar{x}', \bar{y}'$.

Sats (Nash 1950): Varje spel har minst en jämviktpunkt.

I BoS finns 3 stycken jämviktpunkter som ges av strategierna

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = & ((1, 0), (1, 0)) \\ & ((0, 1), (0, 1)) \\ & ((\frac{4}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})) \end{aligned}$$

Exempel: Fångarnas dilemma

$$\begin{pmatrix} (-5, -5) & (0, -10) \\ (-10, 0) & (-1, -1) \end{pmatrix}$$

Två tjuvar kan välja mellan att erkänna (strategi 1) och neka (strategi 2). Utdelningen kan ses som ett straff eftersom alla utdelningar är negativa. $(-5, -5)$ är den enda jämviktpunkten i spelet ovan trots att båda spelarna skulle vinna på att båda välja strategi 2 istället, det vill säga få utdelningen $(-1, -1)$ (båda spelarna vill maximera utdelningen).

Tvåpersonersspel med samarbete

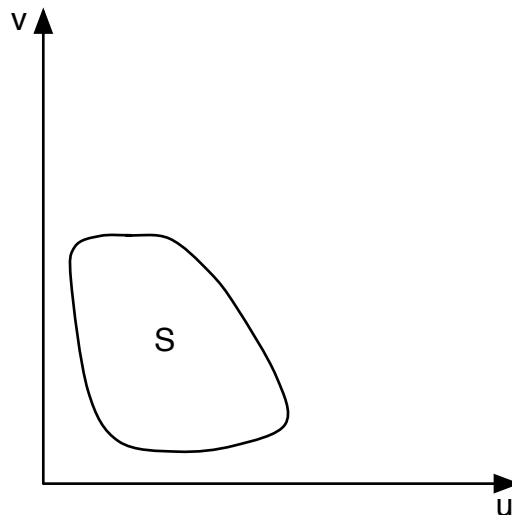
Vi betraktar BOS igen:

$$\begin{pmatrix} (4, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 4) \end{pmatrix}$$

I och II förhandlar om strategier. Lösningarna i rena strategier verkar "orättvisa". Vi såg tidigare att det finns en blandad strategi som är en jämviktpunkt men kan de samarbeta kan de välja en så kallad korrelerad blandad strategi. Med korrelerad menas här att båda spelarna väljer strategi utifrån samma stokastiska variabel. Optimalt är:

$$(\alpha_1, \beta_1) \text{ med } p_1 = \frac{1}{2} \text{ och } (\alpha_2, \beta_2) \text{ med } p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2}$$

Nashs förhandlingsmodell



Figur 1: Kombinationer av strategier

Observera att om $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ är punkter som kan fås genom rena strategier så kan alla konvexa kombinationer fås via korrelerade blandade strategier.

Utdelningsrum

u = I:s utdelning

v = II:s utdelning

S är förhandlingsmängden (de utdelningar som kan fås)

Vi antar att S är sluten, begränsad och konvex.

Exempel: BoS igen

Varje spelare har maxminstrategier som ger u^* respektive v^* . Vi antar att $(u^*, v^*) \in S$.

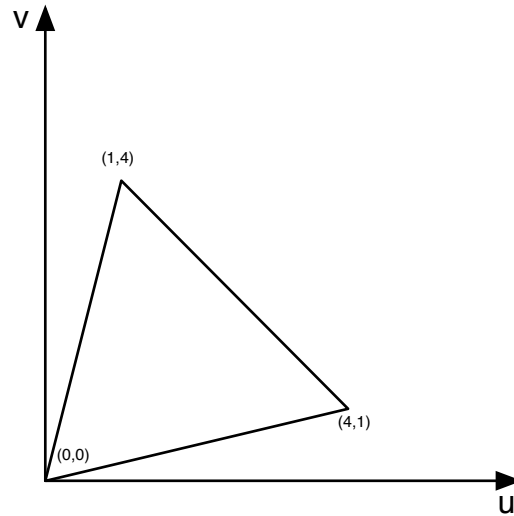
Problem: Vilken punkt i S skall man välja?

Definition: En social valfunktion (SCF: Social Choice Function) är en funktion $\varphi(S, u^*, v^*) = (u_0, v_0)$ definierad för alla S, u^*, v^* .

Nashs lösning: Välj (u_0, v_0) så att $(u_0 - u^*)(v_0 - v^*)$ är maximal i S där $u_0 \geq u^*$ och $v_0 \geq v^*$.

Sats: Om S är sluten, begränsad, konvex finns ett unikt sådant (u_0, v_0) som maximerar $(u_0 - u^*)(v_0 - v^*)$.

Nash argumenterade för att detta är den "korrekta" lösningen och ställde upp axiom som φ bör uppfylla:



Figur 2: Förhandlingsmängden för Battle of the Sexes

1. Paretooptimalitet:

Om $(u_0, v_0) \in S$ och $u_0 \geq u^*, v_0 \geq v^*$,
så finns ingen annan $(u_1, v_1) \in S$ så att $u_1 \geq u_0$ och $v_1 \geq v_0$.

2. Invarians under affina transformer

Låt $T(u, v) = (\alpha_1 u + \beta_1, \alpha_2 v + \beta_2)$ och $T(S) = S'$
Då måste $\varphi(S', u^{*'}, v^{*'}) = (u'_0, v'_0)$

3. Oberoende av irrelevanta alternativ

Låt $P \subset S$ och antag att $\varphi(S, u^*, v^*) = (u_0, v_0) \in P$
Då måste $\varphi(P, u^*, v^*) = (u_0, v_0)$

4. Symmetri

Antag att $(u, v) \in S \Leftrightarrow (v, u) \in S$ och $u^* = v^*$
Om $\varphi(S, u^*, v^*) = (u_0, v_0)$ så måste $u_0 = v_0$

Sats: Från axiomen följer att $\varphi(S, u^*, v^*)$ blir (u_0, v_0) definierat av att $(u_0 - u^*)(v_0 - v^*)$ är maximal.

Man kan tänka sig andra axiom, till exempel

$$S \subset S' \implies \varphi(S, u^*, v^*) \leq \varphi(S', u^*, v^*)$$

men detta skulle strida mot axiom 3.