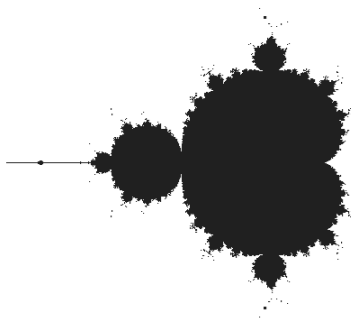




Stockholms Matematiska Cirkel

FRAKTALER

GUSTAV SÆDÉN STÅHL
RUNE SUHR



INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK KTH OCH
MATEMATISKA INSTITUTIONEN STOCKHOLMS UNIVERSITET
2015–2016

Innehåll

En introduktion till fraktaler	1
1 Grundläggande begrepp och bevisföring	3
1.1 Mängder	3
1.2 Funktioner	5
1.3 Matematisk bevisföring	6
1.4 Ett bevis	9
2 Konvergens	14
2.1 Absolutbeloppet	14
2.2 Talföljder och konvergens	15
2.3 Räknelagar för gränsvärden	21
3 Kontinuitet	25
3.1 Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$	25
3.2 Kontinuerliga funktioner	26
3.3 Unioner av funktionsgrafer	29
4 Talplanet och bilder av funktioner	33
4.1 Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$	33
4.2 Normer och avstånd	35
4.3 Kurvor	37
4.4 Dimensionsbegreppet	41
5 Fraktala kurvor	43
5.1 Konvergens av funktionsföljder	43
5.2 Konvergens och kontinuitet	45
5.3 Kochkurvan	46
5.4 Fler exempel på fraktala kurvor	50
6 Fraktal dimension	53
6.1 Längden av en fraktal kurva	53
6.2 Sveriges kust	55
6.3 Plantäckande kurvor	57
7 Mandelbrotmängden	64
7.1 Komplexa tal	64

7.2	Mandelbrotmängden	66
7.3	Juliamängder	69
8	Fraktaler i naturen	74
	Lösningar till udda övningsuppgifter	75
A	Träning i bevisföring	86
A.1	Tekniker i mängdlära	86
A.2	Tekniker i logik och bevisföring	87
A.3	Tekniker för konvergensbevis	88
	Förslag till vidare läsning	89
	Sakregister	90

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som kurslitteratur till STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL under läsåret 2015–2016 och består av sju kapitel. Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. En bra idé kan vara att försöka läsa varje kapitel själv innan föreläsningen, så att man redan innan vet vad målet med föreläsningen är och vad som kan visa sig vara svårt.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad: övningar kan ha en (★), två (★★) eller tre (★★★) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna facit längst bak i kompendiet. Syftet med dessa är att eleverna ska kunna lösa dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. Övningar med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas räknestugor på KTH där eleverna kan lösa uppgifter tillsammans, och få hjälp av oss.

Vi vill dock betona att få av uppgifterna är helt enkla. Detta betyder att läsaren inte bör titta i facit efter några få minuter, utan att först prata med kompisar om uppgiften, kanske lägga den åt sidan ett tag och tänka på annat, och sedan försöka lite till. Dessutom innebär det att få av eleverna kommer att kunna klara samtliga uppgifter, så ett krav på att eleven ska ha löst alla uppgifter bör inte ingå i examinationen. Dock rekommenderar vi starkt att alla elever åtminstone tittar på och försöker sig på alla övningar.

De flesta övningar kommer att ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

Vi tackar Roy Skjelnes och Anders Lundman, Institutionen för Matematik vid KTH, Torbjörn Tambour vid Matematiska institutionen på Stockholms universitet, Dan Petersen vid Köpenhamns universitet och Katharina Heinrich för givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL, i dagligt tal benämnd Cirkeln, är en kurs som kommer från ett nytt samarbete mellan Kungliga Tekniska högskolan och Stockholms universitet. Cirkeln har tidigare funnits under KTH:s ensamma regi med namnet KTH:S MATEMATISKA CIRKEL men har från och med i år bytt namn. Upplägget kommer dock fortsätta som tidigare år.

MATEMATISKA CIRKELN startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier. Lärarna på Cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet eller förslag till annan förkovran inom matematik.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övriga uppgifter om STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL finns tillgängligt på

<http://www.math.kth.se/cirkel>

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om STOCKHOLMS MATEMATISKA CIRKEL och övertyga skollärdarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygssättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Betyg E: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyg C: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyg A: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyget *B* ges till elever som uppfyllt kraven för betygssteget *C* och en övervägande del av kraven för betygssteget *A*. På samma sätt fås betyget *D* om kraven för *E* är uppfyllda och en övervägande del av kraven för *C*.

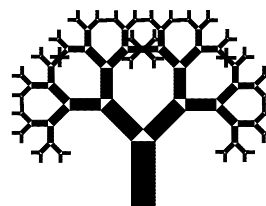
Det är också till exempel möjligt att skolorna samarbetar, så att elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, augusti 2015

En introduktion till fraktaler

Klassisk geometri handlar om att beskriva enkla figurer såsom linjer, cirklar och koner. Under 1800-talet insåg dåtidens matematiker att det finns en uppsjö av exempel på figurer som inte kan förklaras med sådan geometri. Några av dessa, såsom Cantormängden, Peanokurvan och Kochkurvan, kommer vi se i detta kompendium. Matematikerna kallade dessa för "monster", och även om man kunde förstå de specifika exempel man studerade så fanns det ingen övergripande teori som kunde förklara dessa figurer.

Den som lyckades skapa en sådan teori var matematikern Benoit Mandelbrot (1924–2010) som döpte dessa objekt till *fraktaler* i sin artikel *Les objets fractals, forme, hasard et dimension* från 1975. Spännande nog så definierade han inte bara fraktaler som matematiska objekt utan gav även exempel på fraktaler som kan hittas i naturen. Mandelbrot hävdade att vår värld är fraktalsk, och i sin bok *The fractal geometry of nature*, som än idag är en av de mest betydelsefulla böckerna i ämnet, finns massor av sådana exempel. Till höger ser vi en fraktal modell av ett träd.



Mandelbrot var dock emot att ge en rigorös definition av fraktaler då han var rädd för att utesluta intressanta fall. Den intuitiva definitionen man använder idag är att en fraktal är en geometriskt figur som är självupprepande eller självliknande (eng. *self-similar*). Med detta menas att fraktalen är uppbyggd av mindre kopior av sig själv så dess struktur upprepas när man skalar upp figuren. Då alla dessa kopior är uppbyggda av ännu mindre kopior av samma figur, och så vidare, så ger fraktaler ofta upphov till både intressanta och estetiskt tilltalande mönster.

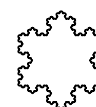
Ordet fraktal kommer från det latinska ordet *fractus* – ett adjektiv som kan översättas med bruten eller splittrad. En förklaring till detta ordval är att en fraktal är en geometrisk figur som har en så fin struktur att dess dimension inte behöver vara ett heltal! Jämför också med det engelska ordet *fraction* som betyder bråk eller bråkdel.

I detta kompendium kommer vi studera fraktaler med hjälp av matematik. Vi går igenom grunderna i matematisk analys och lär oss fundamentala begrepp så som konvergens och kontinuitet. Denna teori använder vi sedan för att förstå de fraktaler som finns utspridda i kompendiet. Några av dessa fraktaler listar vi här nedan.

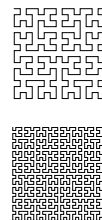
Sierpinskiatriangeln är ett klassiskt exempel på en fraktal och är uppkallad efter den polska matematikern Wacław Sierpiński (1882–1969). Denna figur kommer vi studera i både Kapitel 2 och 5.



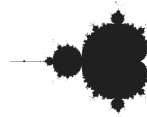
Kochkurvan och **Kochsnöflingan** är uppkallade efter den svenske matematikern Helge von Koch som levde 1870–1924. År 1904 visade han att denna figur var ett exempel på en kontinuerlig men ingenstans deriverbar kurva. Denna kurva kommer vi detaljstudera i Kapitel 5.



Hilbertkurvan konstruerades första gången år 1891 och är ett exempel på en plantäckande kurva, vilket är en kurva som fullständigt täcker en kvadrat. Med andra ord är det ett endimensionellt objekt som, mot all intuition, täcker ett tvådimensionellt område. Detta kommer vi förklara i Kapitel 6. Kurvan är uppkallad efter David Hilbert (1862–1943) som räknas till en av de mest framstående matematikerna genom tiderna.



Mandelbrotmängden har fått sitt namn efter självaste Mandelbrot och är kanske den mest kända fraktalen. Det är även denna vi har på framsidan av detta kompendium. Efter att ha gett en kort introduktion till komplexa tal kommer vi studera denna fraktal i Kapitel 7.



Vi kommer även ge exempel på objekt med fraktal struktur som förekommer i verkligheten. Grafer över en akties värde som man hittar på ekonomidelen av tidningen har en fraktal struktur, och vi diskuterar den i Kapitel 3. Ett annat exempel på naturliga fraktaler ges av kustlinjer och landsgränser som vi visar i Kapitel 6. Detta exempel kommer vi förklara med hjälp av begreppet *fraktal dimension* som vi nämnde ovan – en dimension som inte behöver anta heltalsvärden.



I Kapitel 8 avrundar vi detta kompendium med att visa bilder på några olika fraktala strukturer som går att hitta i naturen.

En intressant kommentar att nämna i sammanhanget är att det är först sedan 30-40 år tillbaka som man kunnat använda datorer för att rita upp och räkna på fraktaler ordentligt. Mandelbrot själv jobbade under en lång del av sin karriär på IT-företaget IBM där han kunde använda de tidiga datorer som företaget hade för att rita upp de fraktaler han studerade. Eftersom bilderna har gett mycket intuition och intresse för ämnet så är det först de senaste fyrtio åren som fraktaler har börjat studeras ordentligt, och är därför i matematiska sammanhang ett relativt nytt ämne.

1 Grundläggande begrepp och bevisföring

I det här kapitlet kommer vi att ge en introduktion till matematisk bevisföring. Innan dess kommer vi dock att introducera lite terminologi. I matematiken använder man ofta *mängder* som ett bekvämt språk för att beskriva saker och ting, och detta kommer vi också att göra i detta kompendium. Vi börjar därför med att beskriva denna teori.

1.1 Mängder

Låt oss titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En *mängd* är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för *element* i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Ett sådant exempel är

$$A = \{1, 3, a, 7\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a$ och 7 . Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

En mängd kan också ha oändligt många element, och då går det inte att skriva ned alla element. Ett exempel på en oändlig mängd är

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

De tre punkterna betyder här att *alla* positiva heltal ingår i mängden.

Exempel 1.1.1. Mängden som består av alla udda heltal mellan 0 och 10 kan skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad \blacktriangle$$

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x *tillhör* A . Exempelvis gäller $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett objekt x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den *tomma mängden* innehåller inga element och betecknas $\emptyset$.

Definition 1.1.2. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en *delmängd* till B . Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.1.3. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. $\blacktriangle$

Ett användbart sätt att beskriva en mängd är som en delmängd av en annan mängd. Det finns ett speciellt skrivsätt för detta, nämligen

$$\{x \in D \mid \text{villkor på } x\}.$$

Med detta menar man delmängden bestående av de element i mängden D som uppfyller de givna villkoren. Strecket $|$ utläses ”så att”. Som exempel kan vi definiera

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} \mid n \text{ är udda}, \}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} \mid y > 2\}.$$

Mängden B är delmängden av de positiva heltalen som består av alla udda positiva heltal, medan C är delmängden av $\{1, 2, 3, 4\}$ bestående av element större än 2. Alltså har vi

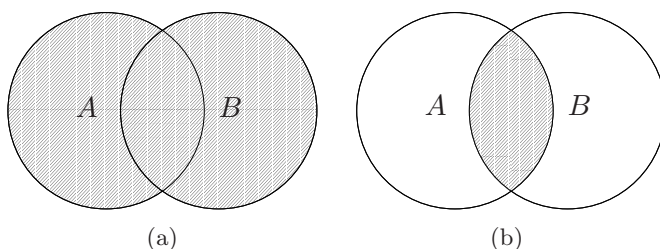
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.1.4. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A \mid x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A \mid x < 3\} = \emptyset$. Vidare har vi att $4 \in A$ men $4 \notin B$. ▲

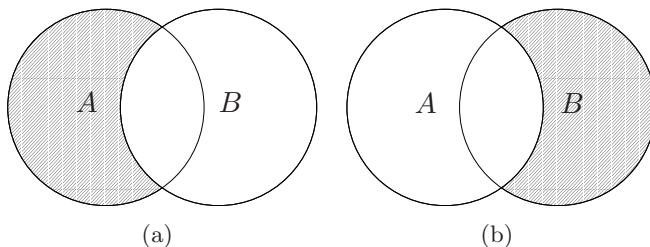
Definition 1.1.5. Antag att A och B är mängder. *Unionen* av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. *Snittet* av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$. *Differensen* av A och B består av alla element som ligger i A men inte ligger i B , och betecknas $A \setminus B$. Mängderna A och B kallas för *disjunkta* om $A \cap B = \emptyset$.

Exempel 1.1.6. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 8, 3, 4711\}$ och $C = \{2, 4, 7, 8\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \cap C = \{8\}$ och mängderna A och C är disjunkta. Dessutom gäller att $A \setminus B = \{1, 6\}$ och $B \setminus A = \{8, 4711\}$. Till skillnad från unionen och snittet är differensen av två mängder inte symmetrisk i A och B . ▲

Ett användbart sätt att åskådliggöra union, snitt och differens är med hjälp av så kallade *Vennndiagram*, som visas i Figur 1.1 och Figur 1.2.



Figur 1.1: Vennndiagram som åskådliggör mängderna (a) $A \cup B$ och (b) $A \cap B$.



Figur 1.2: Vennndiagram som åskådliggör (a) $A \setminus B$ och (b) $B \setminus A$.

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de *naturliga talen* $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$. Tar vi med negativa tal får vi *heltalen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *Zahl* som betyder tal. Mängden av alla kvoter av två heltal $\frac{p}{q}$ där $q \neq 0$ innehåller till exempel $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{243}$ och $\frac{25}{1}$. Vi kallar mängden de *rationella talen* och betecknar den med $\mathbb{Q}$. Slutligen betecknar vi med $\mathbb{R}$ de *reella talen*, det vill säga alla tal på tallinjen, exempelvis 0 , -1 , $\frac{3}{2}$, $-\frac{527}{3}$, $\sqrt{2}$ och π . I Kapitel 7 kommer vi även lära känna *komplexa tal* och mängden av dessa betecknas med $\mathbb{C}$. Notera att

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Exempel 1.1.7. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$. ▲

Exempel 1.1.8. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2 \cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. ▲

1.2 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$. Detta är ett exempel på en funktion. Formeln säger att om vi tar ett tal $x \in \mathbb{R}$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de reella talen till de reella talen, eftersom både det vi stoppar in, x , och det vi får ut, $f(x)$, är reella tal. Vi brukar beteckna detta med $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 1.2.1. Låt X och Y vara mängder. En *funktion* $f: X \rightarrow Y$ är ett sätt att till varje element $a \in X$ tilldela ett välbestämt element $b \in Y$. Vi skriver $f(a) = b$. Vi säger att a *avbildas* på b och att b är *bilden* av a .

Anmärkning 1.2.2. Ofta säger man att f är en funktion från X till Y istället för att använda beteckningen $f: X \rightarrow Y$. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är *avbildning*.

Exempel 1.2.3. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \dots, 100\}$. Ett exempel på en funktion $f: A \rightarrow B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 2 \in B, \quad f(2) = 4 \in B \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar.

Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definiera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Exempel 1.2.4. Låt $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara den funktion som definieras av formeln $h(x) = 2x^2 - x^3$. Vi har exempelvis att

$$h(1) = 2 \cdot 1^2 - 1^3 = 1, \quad \text{och} \quad h(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2)^3 = 2 \cdot 4 - (-8) = 16. \quad \blacktriangle$$

1.3 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om *bevis* av matematiska påståenden; varje föreläsning kommer att innehålla flera bevis, och majoriteten av övningsuppgifterna går ut på att bevisa någonting. Detta innebär antagligen en omställning från tidigare kurser i matematik. Så vad är då ett bevis egentligen? Här är en möjlig definition.

Definition 1.3.1. Ett *bevis* av ett *påstående* är en *logisk slutledning* som leder från en överenskommen uppsättning av *antaganden* fram till påståendet.

Det förekommer flera viktiga ord i föregående definition. Låt oss diskutera dem ett i taget.

Definition 1.3.2. Ett *påstående* är en logisk utsaga som antingen är sann eller falsk.

Exempel 1.3.3. Här är några exempel på påståenden:

- (i) $2A + 5B > -C^2$.
- (ii) $X \subseteq (Y \cap Z)$.
- (iii) Alla jämna tal är delbara med 2.
- (iv) Alla jämna tal är delbara med 3.

Av dessa vet vi inte om de första två är falska eller sanna, eftersom vi inte vet vad A, B, C respektive X, Y, Z betyder. Det tredje påståendet är sant eftersom varje jämnt tal kan skrivas som $2n$ för något heltal n . Påstående (iv) är dock falskt: ett motexempel ges av det jämna talet 2 som ej är delbart med 3. ▲

Exempel 1.3.4. Här är också några exempel på saker som *inte* är påståenden.

- (i) $x^2 + 6x + 5$
- (ii) Mängden av alla jämna tal.

▲

Påståenden kan kombineras på många olika sätt, som påminner om de sätt vi kan skapa nya mängder av gamla genom operationerna $\cap$, $\cup$ och $\setminus$. Till exempel kan vi sätta två påståenden bredvid varandra och skriva ordet "och" emellan, och vi får ett nytt påstående. Ett annat ord man kan sätta mellan två påståenden är "eller". En annan sak man kan göra är att skriva "Det är inte sant att..." före ett påstående, och detta ger också ett nytt påstående.

Men viktigast av alla sätt att skapa nya påståenden ur gamla är kanske följande.

Definition 1.3.5. Låt P och Q vara två påståenden, till exempel några av de som stod i vår lista. Med $P \implies Q$ menar vi följande påstående: "om påståendet P är sant, är även påståendet Q sant." I ord säger vi att P *implicerar* Q eller att P *medför* Q . Om $P \implies Q$ och $Q \implies P$ så skriver vi att $P \iff Q$. I ord säger vi att P gäller *om och endast om* Q gäller, alternativt att P och Q är *ekvivalenta*.

För varje par av påståenden P och Q får vi alltså ett nytt påstående, $P \implies Q$. Sanningshalten av $P \implies Q$ kan utläsas ur Tabell 1.

P	Q	$P \implies Q$
sant	sant	sant
sant	falskt	falskt
falskt	sant	sant
falskt	falskt	sant

Tabell 1: Hur $P \implies Q$ beror på P och Q .

Ur Tabell 1 ses speciellt att $P \implies Q$ alltid är sant om P är falskt. Detta kan verka ointuitivt till en början. Ett motiverande exempel för denna princip kan vara följande mening som man kan få höra på en biografi: "Om du har en mobiltelefon med dig, är den avstängd?" Om man inte har sin mobiltelefon med sig skall man alltid svara "Ja", oavsett om man har stängt av den eller inte.

Exempel 1.3.6. Det gäller att

$$5a + b = 0 \implies 5a = -b.$$

Här gäller även den omvända implikationen, så vi hade kunnat skriva $\iff$ i stället för $\implies$. Vi har också att

$$5a = -b \implies 5ac = -bc,$$

men här är omvändningen inte nödvändigtvis sann. För att gå från det vänstra påståendet till det högra måste vi nämligen dela med c , vilket vi inte vet är tillåtet om vi inte vet att $c \neq 0$. Vi har dock att

$$5ac = -bc \text{ och } c \neq 0 \implies 5a = -b.$$

▲

Exempel 1.3.7. Påståendet

$$\pi > e \implies (\text{Alla jämna tal är delbara med } 3)$$

är falskt, eftersom det första påståendet är sant medan det andra är falskt. Dock är påståendet

$$(\text{Alla jämna tal är delbara med } 3) \implies \pi > e$$

lustigt nog sant enligt vår definition av $\implies$. ▲

Exempel 1.3.8. För varje påståande P gäller att påståendet $P \implies P$ är sant, oavsett om P är sant eller inte. ▲

Definition 1.3.9. En *logisk slutledning* är en sekvens av påståenden

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

med egenskapen att påståendet $P_i \implies P_{i+1}$ är sant för alla i .

Definition 1.3.10. Ett *antagande* är ett påståande som vi förutsätter är sant. Ibland kallas dessa synonymt för *axiom* eller *postulat*.

Vi vet nu alltså vad ett bevis av ett påståande Q är: det är en kedja av mindre, enklare påståenden som låter oss dra slutsatsen att Q är sant, endast utgående ifrån en mindre uppsättning antaganden som vi i förväg har bestämt oss för att starta med.

Exempel 1.3.11. *Antag* att $\frac{3x}{2} = 6$ och att vi vill visa att $x = 4$. Låt påståendet P_1 vara " $\frac{3x}{2} = 6$ ", P_2 vara " $3x = 12$ " och P_3 vara " $x = 4$ ". Då gäller att påståendet $P_1 \implies P_2$ är sant eftersom vi kan gå från den första likheten till den andra genom att multiplicera båda leden med 2. På samma sätt har vi att påståendet $P_2 \implies P_3$ är sant eftersom vi kan gå från P_2 till P_3 genom att dividera med 3. Därmed har vi skapat en logisk slutledning som visar att *om vi antar att* P_1 är sant så är även P_3 sant. ▲

När vi skriver ett bevis brukar vi dock inte bara skriva en lång följd av påståenden med $\implies$ mellan – i stället brukar man försöka uttrycka beviset i vanliga ord och meningar. Symbolen $\implies$ byts till exempel ut mot konstruktioner som "vilket innebär att..." eller "eftersom... så..." eller "från vilket vi drar slutsatsen att...", och så vidare.

Speciellt värt att nämna är begreppet *motsägelsebevis*. Detta är en speciell bevisteknik där man i stället för att visa att ett påståande P är sant, så bevisar man att det *inte kan vara falskt*. Med detta menar vi att man börjar med antagandet att P inte gäller, och försöker att härleda ett påståande som man vet inte stämmer, till exempel att $0 = 1$. Enligt Tabell 1 så kan bara ett falskt påståande implicera ett falskt påståande, så vårt antagande att P inte gällde måste ha varit falskt.

I detta kompendium kommer vi att förutsätta att läsaren känner till följande:

- (i) De olika sorternas tal: heltal, rationella, reella.

- (ii) Hur man jämför tal med varandra: relationerna $\leq$, $\geq$ och $=$ samt olika varianter såsom $<$, $>$ och $\neq$.
- (iii) Operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, och deras grundläggande räkneregler, såsom att $a+b = b+a$ eller att $0 \cdot a = 0$ för alla a .
- (iv) Grundläggande geometriska egenskaper, såsom att vinkeln av ett helt varv är 360° eller att vinkelsumman i en triangel är 180° .
- (v) I några av exemplen och uppgifterna förekommer funktioner som $\sin$, $\cos$ och $\log$, utan att dessa har definierats formellt i texten. Vi vill dock betona att själva teorin (det vill säga, satserna och bevisen) inte förutsätter kännedom om dessa funktioner.

I så stor utsträckning vi bara kan kommer vi att försöka påpeka om vi i ett bevis använder oss av ett antagande som inte står med på denna lista. Det här är inte så lätt som det låter: ofta smyger det sig in ett antagande i ett bevis man inte har tänkt på att man använder, eller så tar man något för givet som egentligen inte är uppenbart.

Vår lista på antaganden är inte så precist formulerad: vi skriver bara ”grundläggande räkneregler”, men räknar inte upp alla dessa. Vi ber om läsarens överseende.

1.4 Ett bevis

För att inte denna första föreläsning endast skall bli till torrsim kommer vi nu att bevisa ett påstående.

Sats 1.4.1. *Låt a och b vara icke-negativa reella tal. Då gäller att*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Då detta påstående, och en stor del av detta kompendium, handlar om olikheter listar vi här flera egenskaper som vi kommer använda i fortsättningen och som ingår i de räkneregler som vi förutsätter att läsaren känner till:

- (i) Om $a \geq b$ och $b \geq c$ så är $a \geq c$.
- (ii) $a \geq b$ om och endast om $a - b \geq 0$.
- (iii) Om $a \geq b$ och $c \geq d$ så är $a + c \geq b + d$.
- (iv) Om $a, b \geq 0$ så är $a \geq b$ ekvivalent med $a^2 \geq b^2$.
- (v) Om $a \geq b > 0$ så är $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$.
- (vi) För varje reellt tal a är $a^2 \geq 0$.

Dessa egenskaper gäller för alla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man kan i fall (i)–(v) byta ut $\geq$ mot den strikta olikheten $>$. Vi har även att $a \geq b$ om och endast om $b \leq a$ vilket ger motsvarande egenskaper av de ovan i termer av $\leq$.

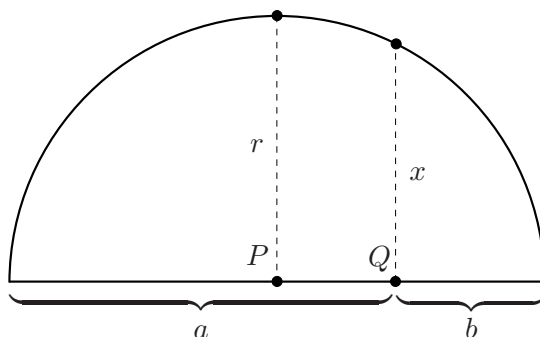
För att visa att man kan bevisa påståenden på flera olika sätt kommer vi nu ge två olika bevis för Sats 1.4.1.

Bevis 1. Skriv $x = \frac{a+b}{2}$ och $y = \sqrt{ab}$. Påståendet som vi ska visa är alltså att $x \geq y$. Observera att $x, y \geq 0$, så $x \geq y$ är ekvivalent med $x^2 \geq y^2$. Olikheten $x^2 \geq y^2$ är sann om och endast om $x^2 - y^2 \geq 0$. Alltså, om vi kan visa att $x^2 - y^2 \geq 0$ så är vi klara. Genom att använda kvadreringsreglerna kan vi skriva

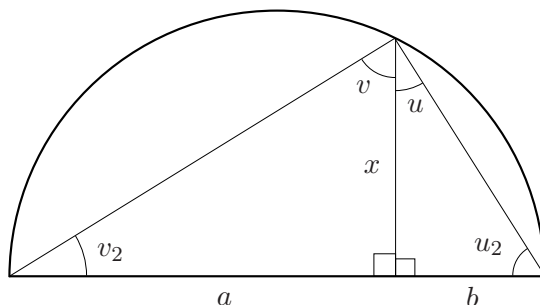
$$x^2 - y^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Eftersom kvadrater aldrig är negativa gäller att $x^2 - y^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$. Därmed är $x^2 \geq y^2$ vilket medför att $x \geq y$. $\square$

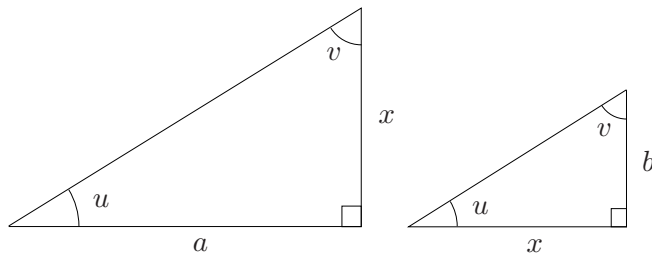
Bevis 2. Rita en halvcirkel med $a+b$ som diameter. Låt P vara mittpunkten av diametern och låt Q vara punkten som delar in diametern i två delar av längd a respektive b . Dra nu två linjer vinkelräta mot diametern; den ena från punkten P upp till periferin, och den andra från Q upp till periferin. Längden av den första linjen är per definition lika med radien av halvcirkeln som är $r = \frac{a+b}{2}$. Den andra linjens längd kallar vi för x . Vi illustrerar allt detta i figuren nedan. Notera att vi ritat $a > b$ men argumentet är oberoende av detta val.



Från denna figur är det klart att $\frac{a+b}{2} = r \geq x$. Vi beräknar nu x i termer av a och b . Genom att dra linjer som i figuren nedan skapar vi två rätvinkliga trianglar; den ena med kateterna a och x , och den andra med kateterna x och b .



Enligt Övning 1.10 är $v + u = 90^\circ$, så $u = 90^\circ - v$. Eftersom vinkelsumman i en triangel är 180° följer därför att $v_2 = 180^\circ - 90^\circ - v = 90^\circ - v = u$ och på samma sätt att $u_2 = v$. De två triangelarna är därför likformiga.



Det betyder att vi har en likhet av kvoter $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Denna likhet kan skrivas om till $x^2 = ab$, vilket ger att $x = \sqrt{ab}$. Eftersom vi från vår första figur har $\frac{a+b}{2} = r \geq x$ följer det alltså att $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. $\square$

Anmärkning 1.4.2. Talet $\frac{a+b}{2}$ kallas för det aritmetiska medelvärdet av a och b , och talet $\sqrt{ab}$ kallas för det geometriska medelvärdet. Denna sats säger alltså att det aritmetiska medelvärdet alltid är minst lika stort som det geometriska. Från den första figuren av det andra beviset kan vi även direkt se att vi har en likhet $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ precis då $a = b$.

Anmärkning 1.4.3. Som nämnts tidigare så kommer en stor del av denna kurs handla om bevis. Alla påståenden vi stöter på kommer vi att bevisa – med några undantag:

För det första så kommer vi i Kapitel 5 använda en egenskap hos de reella talen vars bevis skulle kunna ta upp ett helt eget kompendium, eftersom vi först skulle behöva ge en rigorös definition av reella tal. Se Anmärkning 5.1.6.

I några exempel kommer vi även skriva ner vissa formler utan att bevisa att de är sanna – som i Exempel 2.2.12. Anledningen till detta är inte att bevisen är svåra, utan enbart att de skulle ta upp utrymme som vi valt att lägga på annat. Läsaren som är förtrogen med matematisk induktion uppmanas att försöka bevisa även dessa formler.

Det sista undantaget kommer när vi avslutar Kapitel 7 med att gå igenom lite mer avancerade begrepp genom enbart intuitiva förklaringar.

Utöver dessa undantag är resultaten i detta kompendium rigorös matematik.

Övningar

Se Appendix A för tips på hur man löser övningar.

Övning 1.1 (*). Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $C = \{2, 4, 6, \dots\}$ och $D = \{1, 4, 19, 36, 101\}$. Bestäm

(i) $B \cup C$,

(ii) $B \cap C$,

- (iii) $D \cap C$,
- (iv) $\{x \in D \mid x \in B\}$,
- (v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\}$,
- (vi) $\{x + 1 \mid x \in D\}$.

Övning 1.2 (★). Betrakta mängderna $A = \{1, a\} \cup \{\pi\}$ och $B = \{a, \star\}$.

- (i) Räkna upp alla element i A .
- (ii) Räkna upp alla delmängder av A .
- (iii) Vad är $A \cup B$ och $A \cap B$?

Övning 1.3 (★★). Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ och låt $B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$. Visa att $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

(Ledning: Tag först $x \in \mathbb{N}$ och visa att $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Tag sedan $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ och visa att $x \in \mathbb{N}$. Använd detta för att visa att mängderna är lika.)

Övning 1.4 (★★). Ge ett exempel på en funktion från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ till mängden $\{A, B, C\}$. Hur många olika funktioner $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C\}$ finns det?

Övning 1.5 (★★). (i) Beskriver $f(x) = \sqrt{x}$ en avbildning från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$?

- (ii) Beskriver $f(a) = \pi$, $f(b) = \star$ och $f(0) = \sqrt{2}$ en avbildning från mängden $\{0, a, b, 1\}$ till mängden $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$?
- (iii) Beskriver $f(a) = \pi$, $f(b) = \star$ och $f(a) = \star$ en avbildning från $\{a, b\}$ till $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$?

Om svaret är nej, kan du rätta till det så att det blir funktioner?

Övning 1.6 (★★★). Låt A och B vara mängder. Vart och ett av följande påståenden är ekvivalent till exakt ett annat. Vilka hör ihop?

- (i) $x \in A$,
- (ii) $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$,
- (iii) $A \subseteq A \cap B$,
- (iv) För alla x gäller: $x \in A \implies x \notin A$,
- (v) $A \cup B = A$,
- (vi) $A = B$,
- (vii) $A = \emptyset$,
- (viii) $A \subseteq B$,
- (ix) $\{x\} \subseteq A$,

(x) För alla x gäller: $x \in B \implies x \in A$.

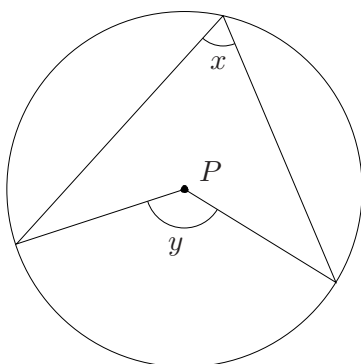
Övning 1.7 (*). Avgör vilka av följande utsagor som är påstående enligt vår definition av ett påstående. Vilka av dessa är sanna, vilka är falska, och vilka behöver vi mer information för att avgöra?

- (i) Mängden av de naturliga talen.
- (ii) a är ett positivt heltal.
- (iii) Talet a är jämnt.
- (iv) Varje mängd innehåller minst ett element.
- (v) $a = 2$.
- (vi) $a = 5$.
- (vii) $x = a$ är lösningen till ekvationen $3x + 5 = 11$.

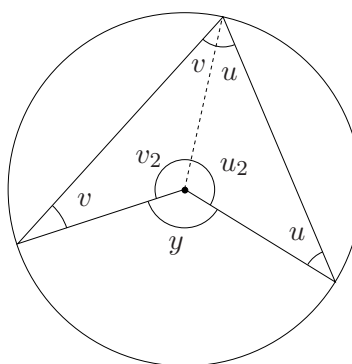
Övning 1.8 (*). Använd påståenden från föregående övning och bilda olika sammansatta påståenden på formen $P \implies Q$. Hitta minst två sådana påståenden som är sanna respektive falska.

Övning 1.9 (**). Behövs kravet att $x, y \geq 0$ för att $x \geq y$ ska vara ekvivalent med $x^2 \geq y^2$? Motivera med exempel.

Övning 1.10 (***). Visa att vinkeln y är dubbelt så stor som vinkeln x i Figur 1.3 genom att använda Figur 1.4. Börja med att förklara Figur 1.4.



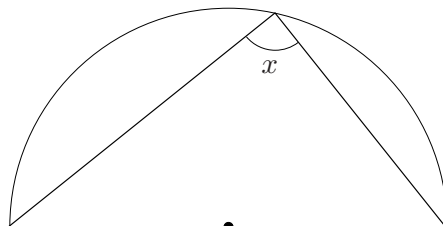
Figur 1.3: P är mittpunkten av cirkeln.



Figur 1.4: Två trianglar.

(Ledning: Vinkeln av ett helt varv är 360° .)

Använd resultatet ovan för att visa att vinkeln x i Figur 1.5 är 90° .



Figur 1.5: En halvcirkel.

2 Konvergens

I detta kapitel inför vi ett av de fundamentala begreppen inom matematisk analys – *konvergens*. Ordet konvergens kommer från det latinska ordet *convergo* som kan översättas med ”närma sig” alternativt ”löpa samman”. Vi kommer här studera konvergens av talföljder $x_1, x_2, x_3, \dots$. Att en sådan följd konvergerar betyder att talen x_n närmar sig ett fixt värde, ett så kallat gränsvärde, för alla stora heltal n .

Att förstå hur talföljder beter sig och huruvida de konvergerar eller inte är ett första steg i att studera fraktaler. Många av de fraktaler vi beskriver i detta kompendium konstrueras via iterativa processer som tar en enkel figur som vi sedan deformerar på ett strukturerat sätt upprepade gånger. Konvergensbegreppet är då viktigt för att förstå huruvida resultatet av sådana iterativa processer stabiliseras eller inte. Detta återkommer vi till i Kapitel 5 men vi kommer redan i detta kapitel se exempel på hur konvergensbegreppet för talföljder hjälper oss att förstå vissa typer av fraktaler.

För att kunna skriva ner definitionen av konvergens behöver vi ett verktyg som avgör hur nära två tal är varandra. Vi börjar därför med att gå igenom absolutbeloppet.

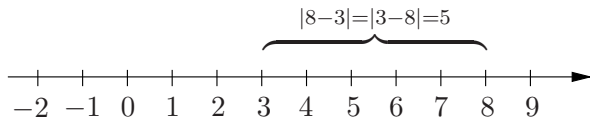
2.1 Absolutbeloppet

När man tänker på storleken av tal så känns kanske talet -3256 som ett någorlunda ”stort” tal, men då det är negativt är det mindre än talet 2, vilket vi skriver $-3256 < 2$. Talet 2 däremot brukar man ofta inte kalla för ett ”stort” tal och därmed borde heller inte -3256 anses stort. Anledningen är att vi har tagit hänsyn till tecknen på de två talen, vilket vi dock inte alltid vill göra.

Definition 2.1.1. Låt $x \in \mathbb{R}$. *Absolutbeloppet* $|x|$ av x definieras som

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Från definitionen följer att $|x| \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, med likhet precis då $x = 0$. Till exempel gäller att $|2| = 2$ och $|-4| = 4$, och generellt att $|x| = |-x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Man kan nämligen tolka absolutbeloppet $|x|$ som avståndet på tallinjen från x till punkten 0, och för ett tal x gäller att x och $-x$ har samma avstånd till 0. Avståndet mellan en punkt y och en punkt x ges av $|x - y| = |y - x|$. Exempelvis har vi att avståndet mellan 3 och 8 är 5 längdenheter, och mycket riktigt är $5 = |3 - 8| = |8 - 3|$.



Vi kommer ofta behöva uppskatta värdet av ett absolutbelopp, och ett väldigt användbart resultat för att göra detta är följande olikhet.

Sats 2.1.2 (Triangelolikheten). *För alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller det att*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Bevis. Från definitionen av absolutbelopp gäller att $x \leq |x|$ och $y \leq |y|$. Genom att addera dessa olikheter får vi att

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Definitionen av absolutbeloppet ger även att $-x \leq |x|$ och $-y \leq |y|$. Adderar vi dessa två olikheter får vi

$$-x - y \leq |x| + |y|.$$

Eftersom $|x + y|$ är lika med antingen $x + y$ eller $-(x + y) = -x - y$ får vi, oavsett tecknet på $x + y$, att

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad \square$$

Anmärkning 2.1.3. Namnet *triangelolikheten* kommer från en olikhet som finns hos sidorna i en triangel. Vi återkommer till det i Kapitel 4.

Triangelolikheten förklarar hur absolutbeloppet uppför sig med addition, och följande sats förklarar hur absolutbeloppet samverkar med multiplikation.

Sats 2.1.4. *För alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller att $|xy| = |x| \cdot |y|$.*

Bevis. Det finns tre fall att undersöka: fall 1 då $x, y \geq 0$, fall 2 då $x, y < 0$, och fall 3 då precis en av dem är negativ. Vi visar här det sista fallet och lämnar de andra två som Övning 2.4.

Fall 3: Om precis en av x och y är negativ så kan vi av symmetriskäl anta att $x \geq 0$ och $y < 0$. Då har vi att produkten xy är negativ. Därmed följer att $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(xy) = |xy|$, vilket skulle visas. $\square$

Anmärkning 2.1.5. Genom att använda Sats 2.1.2 två gånger får man att $|x + y + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$ för alla $x, y, z \in \mathbb{R}$. Upprepar man detta fler gånger kan man visa motsvarande resultat för summan av n stycken termer för varje positivt heltal n . På samma sätt kan man visa att $|xyz| = |x| \cdot |y| \cdot |z|$ och motsvarande resultat för produkten av n stycken faktorer.

2.2 Talföljder och konvergens

När vi nu har definierat absolutbeloppet kan vi börja studera hur följder av tal närmar sig ett gränsvärde. Vi låter $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ beteckna mängden av alla positiva heltal. Notera att talet 0 inte är med i mängden $\mathbb{Z}_+$ medan 0 är med i de naturliga talen $\mathbb{N}$.

Definition 2.2.1. En *talföljd* är en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Om $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ är en talföljd gäller att $f(n)$ är ett reellt tal för varje positivt heltal n , och vi skriver oftast $x_n = f(n)$. Vi kallar x_n för *termerna* i följderna och skriver oftast (x_n) eller $x_1, x_2, x_3, \dots$ istället för $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Exempel 2.2.2. Här ger vi tre exempel på talföljder.

- (i) Funktionen $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ med $f(n) = n$ för varje n är följden

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

- (ii) Följden $(x_n) = 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ ges av

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är jämn,} \\ 1 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

- (iii) Talföljden

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$$

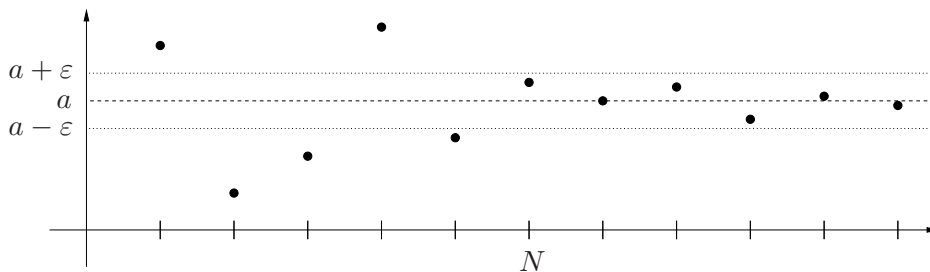
ges av $x_n = \frac{1}{n^2}$ för varje $n \geq 1$. ▲

Anmärkning 2.2.3. Ett annat ord för följd är *sekvens*, och man kallar alternativt talföljder för sekvenser av tal. Det är även möjligt att studera följder av andra element än tal. I Kapitel 5 kommer vi till exempel studera följder av kurvor. Den generella definitionen för en följd av element i en mängd X ges av en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$.

Konvergensbegreppet handlar om hur talföljder uppför sig för stora n . Att en talföljd (x_n) konvergerar mot ett tal a betyder att termerna x_n i talföljden i någon mening närmar sig och stabiliseras runt talet a . Informellt kan man tänka på detta som att avstånden $|x_n - a|$ blir godtyckligt små för alla tillräckligt stora n . För att kunna jobba med begreppet rigoröst så krävs det dock en exakt definition.

Definition 2.2.4. En talföljd (x_n) är *konvergent* om det finns ett tal $a \in \mathbb{R}$ med följande egenskap: för varje givet reellt tal $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{Z}_+$ så att $|x_n - a| < \varepsilon$ om $n \geq N$. Talet a kallas i detta fall för följdens *gränsvärde*, och vi skriver $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ eller $x_n \rightarrow a$ när $n \rightarrow \infty$.

Denna definition behöver en ordentlig förklaring – vilket vi ger under de kommande sidorna. Definitionen säger att en följd (x_n) konvergerar mot ett tal a om oavsett vilket avstånd $\varepsilon > 0$ från talet a vi väljer så kommer alla tillräckligt stora termer x_n i följden att ligga närmare a än det avståndet. Notera att olikheten $|x_n - a| < \varepsilon$ är sann om och endast om $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Vi kan därför beskriva konvergensbegreppet genom följande figur.



Figur 2.1: Här har vi markerat de första 11 termerna i en talföljd som konvergerar mot ett tal a . Punkterna markerar talföljdens värden och vi ser att för $n \geq N = 6$ håller sig alla värden mellan $a - \varepsilon$ och $a + \varepsilon$. För ett mindre ε krävs ett större N .

Anmärkning 2.2.5. Det är en standardnotation inom matematiken att beteckna ”små tal” med den grekiska bokstaven ε , som uttalas ”epsilon”. Termen ”lim” vi använde ovan är en förkortning för det latinska ordet *limes* som kan översättas med ”gräns”. Jämför även med det engelska ordet *limit*.

Exempel 2.2.6. Den konstanta talföljden $2, 2, 2, \dots$ med $x_n = 2$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ konvergerar mot $a = 2$. Det är sant eftersom det för varje positivt tal $\varepsilon > 0$ gäller att $|x_n - 2| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$ för alla $n \geq 1$. I detta fall kan vi till exempel välja $N = 1$. ▲

Exempel 2.2.7. Följden $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ges av $x_n = \frac{1}{n}$ för $n \geq 1$. Denna talföljd konvergerar mot 0 trots att $x_n \neq 0$ för alla n . För att bevisa detta måste vi visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett positivt heltal N så att $|x_n - 0| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Tag därför $\varepsilon > 0$. Vi väljer nu N så stort så att $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Då gäller att $\frac{1}{N} < \varepsilon$ och

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

för alla $n \geq N$, vilket skulle visas. ▲

Anmärkning 2.2.8. Notera att vi i definitionen av konvergens inte kräver att $x_n = a$ för något n för att följderna (x_n) ska konvergera mot a . Det enda som krävs är att följderna närmar sig a på så sätt att vi alltid kan välja ett N så att x_n är godtyckligt nära a för alla $n \geq N$. Se även Exempel 2.2.7 ovan.

Definitionen av konvergens av en talföljd är ganska komplicerad. Med lite vana kan man dock lära sig att både läsa och skriva bevis som handlar om talföljder och konvergens. Något som underlättar är att bevisen i princip alltid ser likadana ut:

Vi måste visa att oavsett vilket tal $\varepsilon > 0$ vi väljer kan vi alltid hitta något N sådant att en viss olikhet gäller. Beviset börjar därför med meningen ”Tag $\varepsilon > 0$.” Med detta menar vi att vi har valt något tal ε , och vi vet ingenting om detta tal annat än att det är positivt. Om vi för detta ε kan konstruera något tal N med rätt egenskaper så är beviset färdigt, eftersom vi i så fall kan upprepa proceduren oavsett vilket ε som valts.

Läsaren uppmanas att notera hur många av bevisen i detta kapitel som passar in i denna struktur: vi börjar med att ta ett $\varepsilon > 0$, och vi slutar med att hitta något N så att en viss olikhet gäller. Det svåra är att skriva ned vad som ska in mellan dessa start- och slutpunkter.

Anmärkning 2.2.9. I många exempel och bevis framöver kommer vi arbeta med konvergens på ett sätt som liknar arbetsmetoden i matlagningsprogram – vi har förberett och hittat de värden på N som fungerar innan vi skrev texten. Redan i Exempel 2.2.7 skrev vi ner valet av N direkt efter vi fixerade ε . Anledningen till detta är att göra texten mer lättläst. En svårighet med att arbeta med konvergensbegreppet är dock att hitta ett N som uppfyller de önskade olikheterna. Se även Appendix A.3.

Exempel 2.2.10. Betrakta talföljden $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ från Exempel 2.2.2. Denna sekvens kommer inte konvergera. För att visa detta antar vi motsatsen, det

vill säga att vi antar att den konvergerar mot ett tal a . I så fall ska vi kunna hitta ett N med den önskade egenskapen för varje val av $\varepsilon > 0$. Till exempel ska vi kunna hitta ett N då $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Om talföljden skulle konvergera skulle det alltså finnas ett N så att $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ för alla $n \geq N$. Nu ser vi att om n är udda så är $x_n = 1$ och får att

$$|1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Om istället n är jämnt så är $x_n = 0$ och det fås att

$$|0 - a| < \frac{1}{2}.$$

Den första olikheten är ekvivalent med $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ och den andra olikheten är ekvivalent med $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Vi får därmed att $a > \frac{1}{2}$ samtidigt som $a < \frac{1}{2}$, vilket är omöjligt. Talföljden kan alltså inte ha ett gränsvärde. ▲

Eftersom definitionen av konvergens är ganska krånglig så måste vi även undersöka att de saker som känns intuitiva faktiskt är sanna. Till exempel har vi följande sats.

Sats 2.2.11. *Om en talföljd (x_n) konvergerar mot både a och b så är $a = b$. Med andra ord, en konvergent följd har ett unikt gränsvärde.*

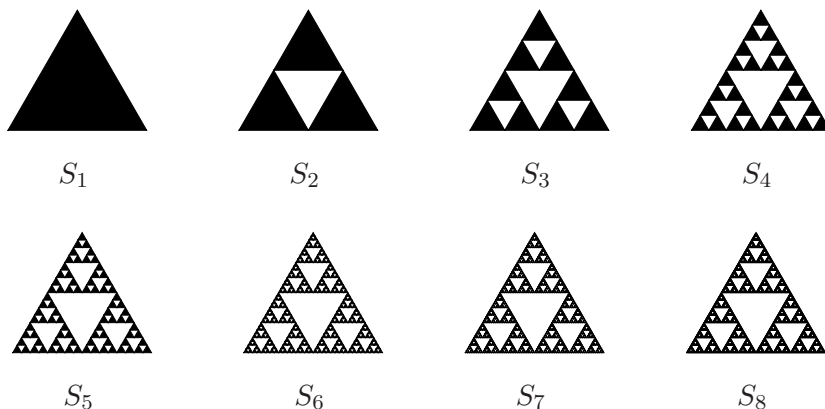
Bevis. Tag $\varepsilon > 0$. Sätt $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$. Då (x_n) konvergerar mot a så finns det ett heltal $N_1 \geq 1$ så att $|x_n - a| < \hat{\varepsilon}$ för alla $n \geq N_1$. På samma sätt finns det ett $N_2 \geq 1$ så att $|x_n - b| < \hat{\varepsilon}$ för alla $n \geq N_2$. Väljer vi $N = \max(N_1, N_2)$ så gäller båda olikheterna ovan för $n \geq N$. Notera att vi för varje $n \geq N$ kan skriva $b - a = b + (-x_n + x_n) - a = (b - x_n) + (x_n - a)$. Från triangelolikheten får vi då

$$|b - a| = |(b - x_n) + (x_n - a)| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

för alla $n \geq N$. Vi har alltså visat att avståndet $|b - a| < \varepsilon$. Då $\varepsilon > 0$ var godtyckligt innebär detta att avståndet mellan a och b måste vara mindre än varje positivt reellt tal. Detta kan bara vara sant om $|b - a| = 0$, det vill säga om $a = b$. □

Här kommer två exempel där vi använder konvergens för att studera fraktaler.

Exempel 2.2.12. Låt S_1 vara en liksidig triangel med sidlängd 1. Plocka sedan bort en liksidig triangel med sidlängd $\frac{1}{2}$ från mitten av S_1 som i bilden nedan. Det som är kvar är då en union av tre stycken liksidiga trianglar av sidlängd $\frac{1}{2}$, och vi kallar denna figur för S_2 . På samma sätt skapar vi S_3 genom att plocka bort liksidiga trianglar med sidlängd $\frac{1}{4}$ från mitten av alla dessa tre trianglar. Fortsätter vi på samma sätt får vi en följd av geometriska figurer (S_n) . Nedan ser vi de första åtta elementen i denna följd.



Genom att fortsätta denna iterativa process "oändligt" många gånger får man *Sierpinskiatriangeln*. Vad vi menar med att upprepa processen oändligt många gånger är att denna följd av geometriska figurer konvergerar mot en geometrisk figur som vi kallar Sierpinskiatriangeln, och denna gräns är resultatet av vår "oändliga upprepning".

Notera dock att vi inte definierat vad konvergens av allmänna geometriska figurer betyder, och det blir för mycket att förklara för detta kompendium. Vi ber om läsarens overseende. Tittar man på bilderna ovan ser S_7 och S_8 väldigt lika ut, så förhoppningsvis kan läsaren anse det troligt att denna sekvens faktiskt kommer stabilisera sig. I Kapitel 5 definierar vi istället konvergens av tvådimensionella kurvor, och i Exempel 5.4.1 kommer vi se att Sierpinskiatriangeln existerar som en gräns av sådana kurvor.

Låt oss nu beräkna arean a_n av figuren S_n för varje heltal $n \geq 1$ och beräkna gränsvärdet av denna talföljd.

$n = 1$: Triangeln S_1 är liksidig med sidlängd 1, så dess höjd kan, med hjälp av Pythagoras sats, beräknas till $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Arean av en triangel ges av produkten av höjden och basen dividerat med 2, så vi får att arean av triangeln S_1 är $a_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$n = 2$: Eftersom vi tagit bort en fjärdedel av S_1 för att skapa S_2 får vi att arean av S_2 är $a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

$n = 3$: På samma sätt skapades S_3 genom att ta bort en fjärdedel från varje mindre triangel i S_2 så S_3 har area $a_3 = \frac{3}{4}a_2 = \frac{3^2}{4^2}a_1 = \frac{9\sqrt{3}}{64}$.

I allmänhet får vi att arean av S_n är $a_n = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}a_1 = \frac{3^{n-1}\sqrt{3}}{4^n}$. Enligt Övning 2.7 konvergerar följden (a_n) mot 0, vilket innebär att Sierpinskiatriangeln har area 0.

På samma sätt beräknar vi omkretsen av Sierpinskiatriangeln, där vi även räknar med omkretsen för alla hål, genom att studera följden (l_n) där l_n är omkretsen av S_n för varje $n \geq 1$.

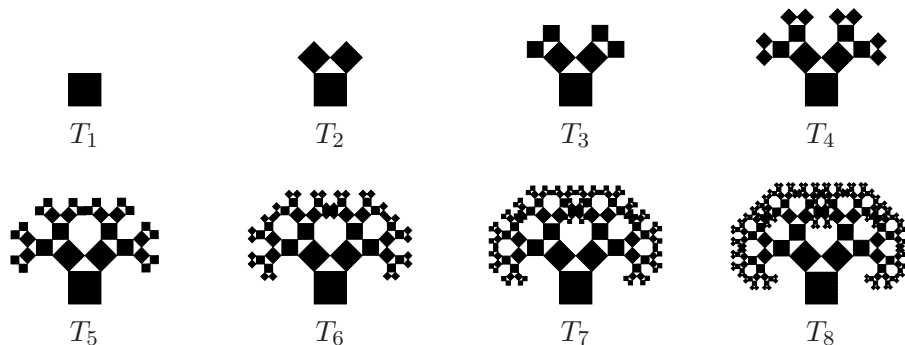
$n = 1$: Varje sida av S_1 har längd 1, så omkretsen är $l_1 = 3 \cdot 1 = 3$.

$n = 2$: Varje liten triangel i S_2 har sidlängd $\frac{1}{2}$ och det finns tre sådana trianglar, vilket ger en omkrets av S_2 på $l_2 = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

$n = 3$: Det finns 9 stycken trianglar med sidlängd $\frac{1}{4}$ så omkrets av S_3 är $l_3 = 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$.

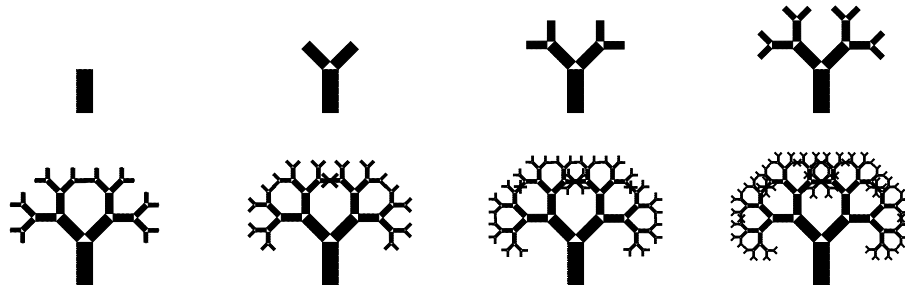
I allmänhet består S_n av 3^{n-1} trianglar där de tre sidorna i varje triangel har sidlängd $\frac{1}{2^{n-1}}$. Omkrets av S_n är därför $l_n = 3 \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3^n}{2^{n-1}}$ för varje $n \geq 1$. Enligt Övning 2.7 växer följd (l_n) obegränsat, så Sierpinski-triangeln är en geometrisk figur som har area 0 men oändlig omkrets! ▲

Exempel 2.2.13. Tag en kvadrat med sidlängd 1 och kalla detta för T_1 . Placera sedan två kvadrater med sidlängd $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ovanpå T_1 som i figuren nedan och kalla detta för T_2 . På vardera av dessa två kvadrater placerar vi på samma sätt två nya kvadrater med sidlängd $\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ och kallar detta T_3 . Genom att fortsätta på samma sätt skapar vi en följd av figurer (T_n) där vi konstruerat T_n genom att placera kvadrater med sidlängd $\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ ovanpå T_{n-1} .



Pythagoras träd är gränsen av denna följd då $n \rightarrow \infty$. I Övning 2.9 visas att Pythagoras träd ligger inuti en rektangel med höjd 4 och bredd 6. Eftersom arean av gränsen av följd (T_n) är klart större än arean av T_1 så följer det att Pythagoras träd är en fraktal med en area någonstans mellan 1 och $4 \cdot 6 = 24$.

Genom att byta ut kvadraterna mot rektanglar kan man skapa en följd som blir aningen svårare att räkna på, men som vi inkluderar för dess visuella kvaliteter.



▲

2.3 Räknelagar för gränsvärden

Sats 2.3.1. Låt (x_n) och (y_n) vara två talföljder som konvergerar mot $a \in \mathbb{R}$ respektive $b \in \mathbb{R}$. Tag också en konstant $c \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = ca.$$

Bevis. Vi visar dessa två påståenden var för sig.

- (i) Tag $\varepsilon > 0$. Vi måste nu hitta ett $N \geq 1$ så att $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Eftersom följderna (x_n) och (y_n) konvergerar mot a respektive b så finns heltal N_1 och N_2 sådana att

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

om $n \geq N_1$ respektive $n \geq N_2$. Sätter vi nu $N = \max(N_1, N_2)$ gäller bägge dessa olikheter om $n \geq N$. Därmed har vi att

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

för alla $n \geq N$, vilket skulle visas.

- (ii) Tag $\varepsilon > 0$. Om $c = 0$ är påståendet uppenbart då båda sidorna är lika med 0, så vi antar att $c \neq 0$. Då (x_n) konvergerar mot a så finns $N \geq 1$ så att $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ för alla $n \geq N$. Med hjälp av Sats 2.1.4 får vi för alla $n \geq N$ att

$$|cx_n - ca| = |c \cdot (x_n - a)| = |c| \cdot |x_n - a| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

vilket skulle visas. $\square$

Vi avslutar nu kapitlet med att tillämpa teorin som vi lärt oss för att bevisa en formel för den så kallade geometriska summan.

Exempel 2.3.2 (Geometrisk summa). Låt $a \in \mathbb{R}$ med $|a| < 1$ och betrakta talföljden $a, a^2, a^3, \dots$. Enligt Övning 2.6 är $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. Den ändliga summan

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$

kallas för en *geometrisk summa*. Med *summasymbolen* Σ kan vi skriva detta som

$$\sum_{i=0}^n a^i = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

Notationen betyder att vi tar summan av alla termer a^i för alla heltal i från 0 till n . Symbolen Σ är ursprungligen en grekisk bokstav som uttalas "sigma".

Notera nu att $as_n = a + a^2 + \dots + a^{n+1}$. Därmed gäller att

$$s_n - as_n = (1 + a + a^2 + \dots + a^n) - (a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1}) = 1 - a^{n+1}.$$

Eftersom vi kan skriva $s_n - as_n = (1-a)s_n$ har vi att $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$. Då $a \neq 1$, och därmed $1-a \neq 0$, kan vi dividera båda sidorna med $1-a$ och få följande formel för den geometriska summan:

$$\sum_{i=0}^n a^i = s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

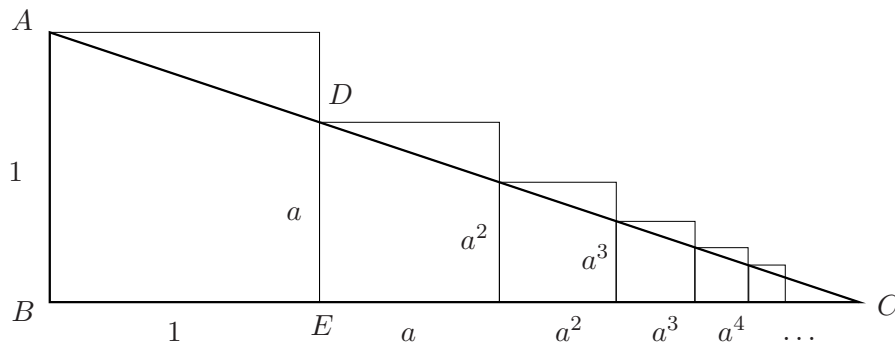
Vi undersöker nu om talföljden $s_1, s_2, s_3, \dots$ konvergerar. Från Sats 2.3.1 fås

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1}) = \\ &= \frac{1}{1 - a} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} \right) = \frac{1}{1 - a} \cdot \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}_{=1} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n}_{=0} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - a} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{1 - a}. \end{aligned}$$

Skriver vi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} a^i$ får vi nu formeln för den *geometriska serien*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a}, \quad \text{där } |a| < 1.$$

För att motivera namnet *geometrisk serie* kommer vi här ge en annan motivering till ovanstående likhet i fallet $0 < a < 1$. Denna förklaring har även en fraktal ingrediens! Betrakta en kvadrat med sidlängd 1 och dra en linje genom ena hörnet och motstående sida på höjd a som i figuren nedan. Om vi fortsätter linjen så skär den kvadraten med sidlängd a nedan på höjd a^2 och så vidare.



Detta ger en triangel ABC med hörn i A , B och C vars längsta katet har längd $L = 1 + a + a^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i$. Triangeln ABC består, precis som fraktaler, av mindre kopior av sig själv. Till exempel är triangeln DEC en mindre kopia av ABC , och dess längsta katet har längd $a + a^2 + a^3 + \dots = L - 1$. Eftersom triangeln DEC är en kopia av ABC så är triangelarna likformiga, så det följer att

$$\frac{L}{1} = \frac{L - 1}{a}.$$

Detta kan skrivas om till samma formel som vi fick tidigare:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = L = \frac{1}{1 - a}.$$

▲

Övningar

Appendix A.3 ger tips på hur man löser övningar om konvergens.

Övning 2.1 (★). Skriv ut de första fyra termerna i följderna som är definierade av $x_n = \frac{n^2+2}{n}$ för alla heltal $n \geq 1$.

Övning 2.2 (★). Konvergerar följderna (x_n) där $x_n = \frac{10}{n}$? Om svaret är ja, vad är gränsvärdet?

Övning 2.3 (★). För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller att $|x - 2| \leq 4$?

Övning 2.4 (★). Gör klart beviset av Sats 2.1.4. Med andra ord, visa att $|xy| = |x| \cdot |y|$ i fall 1 då $x, y \geq 0$ och i fall 2 då $x, y < 0$.

Övning 2.5 (★★). Låt (x_n) vara en följd som konvergerar mot a , och antag att (y_n) är en följd som uppfyller att $x_n = y_n$ för alla utom ändligt många värden på n . Visa att (y_n) konvergerar mot a .

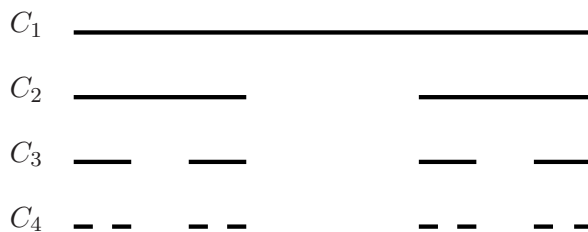
Övning 2.6 (★★★). En egenskap hos tal är följande: Om $r > 1$ så gäller, för varje $K \in \mathbb{R}$, att det finns $N \geq 1$ så att $r^N > K$. Använd denna egenskap för att visa att en följd (a^n) konvergerar mot 0 om a är ett tal med $|a| < 1$.

Övning 2.7 (★★). I denna uppgift ska vi studera talföljderna kopplade till Sierpinski-triangeln från Exempel 2.2.12.

- (i) Visa att talföljden (a_n) konvergerar mot 0.
- (ii) En följd (x_n) går mot oändligheten om det för varje $K > 0$ finns $N \geq 1$ så att $x_n > K$ för alla $n \geq N$. Visa att följderna (l_n) går mot oändligheten.

(Ledning: Använd Övning 2.6.)

Övning 2.8 (★★). För alla tal $a < b$ skriver vi $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Betrakta nu följande följd av figurer. Låt C_1 vara linjesegmentet som ges av intervallet $[0, 1]$. Genom att dela in C_1 i tre lika stora delar och plocka bort mittendelen skapar vi en mängd $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ som vi kan se i bilden nedan. Mängden C_2 består av två stycken linjer, och om vi på samma sätt plockar bort mittersta tredjedelen från vardera av dessa skapar vi mängden C_3 . Fortsätter vi på samma sätt får vi en följd (C_n) där C_n består av 2^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{1}{3^{n-1}}$.



Cantormängden är den mängd som fås som gränsen av denna process. Beräkna längden av Cantormängden. (Ledning: Använd Övning 2.6.)

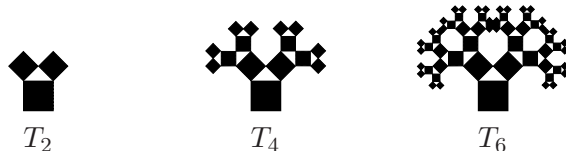
Övning 2.9 (★★). Vi ska här studera Pythagoras träd från Exempel 2.2.13.

- (i) Tag en kvadrat med sidlängd r och placera två mindre kvadrater av sidlängd $\frac{r}{\sqrt{2}}$ på den som i bilden nedan.



Detta är en kopia av T_2 med bas r . Kalla denna figur för Y_r då den påminner om ett Y . Visa att höjden av denna figur är $2r$.

- (ii) Visa att höjden av T_2 är 2, höjden av T_4 är 3 och att höjden av T_6 är $\frac{7}{2}$.



(Ledning: $3 = 2 + 1$ och $\frac{7}{2} = 2 + 1 + \frac{1}{2}$.)

- (iii) Visa att höjden av Pythagoras träd är 4 med hjälp av formeln för den geometriska serien från Exempel 2.3.2.

(Ledning: Beräkna gränsvärdet av höjderna av följderna $T_2, T_4, T_6, \dots$)

- (iv) Visa att bredden av Pythagoras träd är 6.

Övning 2.10 (★★). Dessa uppgifter handlar om geometriska summor, se Exempel 2.3.2.

- (i) Beräkna $\sum_{i=0}^3 \frac{1}{2^i}$.
- (ii) Beräkna $\sum_{i=0}^8 \frac{1}{2^i}$.
- (iii) Beräkna $\sum_{i=4}^8 \frac{1}{2^i}$.
- (iv) Låt m, n vara heltal med $m > n \geq 0$. Visa att $\sum_{i=n}^m a^i = \frac{a^n - a^{m+1}}{1-a}$.
- (v) Låt n vara ett heltal $n \geq 0$. Visa att $\sum_{i=n}^{\infty} a^i = \frac{a^n}{1-a}$.

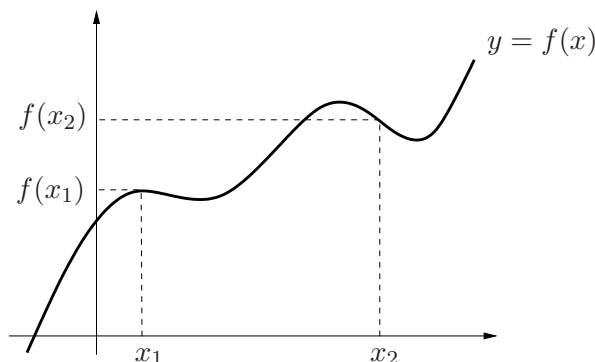
3 Kontinuitet

En användbar metod för att rita upp fraktaler är att rita upp dem som bilder relaterade till vissa funktioner. I detta kapitel kommer vi därför börja att studera funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och deras funktionsgrafer.

Speciellt kommer vi här definiera *kontinuerliga* funktioner. Precis som med konvergens är begreppet kontinuitet fundamentalt inom matematisk analys, och är även intimt förknippat med konvergens. Ordet kontinuitet kommer från det latinska ordet *continuus* som betyder "sammanhängande" eller "samlad". Kortfattat kan man säga att en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig om små förändringar av invärdet x ger små förändringar av utvärdet $f(x)$. Intuitivt kan man tänka att en kontinuerlig funktion är en funktion som man kan rita funktionsgraf till utan att lyfta pennan från pappret.

3.1 Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$

I Kapitel 1 definierade vi funktioner $f: X \rightarrow Y$ mellan två godtyckliga mängder X och Y . Vi kommer här studera specialfallet $X = Y = \mathbb{R}$. I detta fall kan vi rita upp *funktionsgraf* till en sådan funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



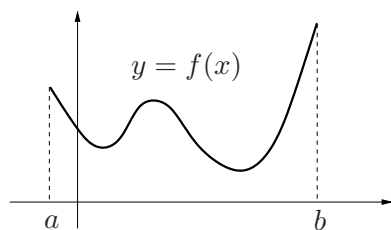
Figur 3.1: Funktionsgraf till en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Som sedvanligt är kallar vi den horisontella axeln för x -axeln och den vertikala för y -axeln. Eftersom x -axeln är oändligt lång så kan vi egentligen inte rita upp hela funktionsgraf, men vi gör det underförstått att grafen fortsätter åt både höger och vänster.

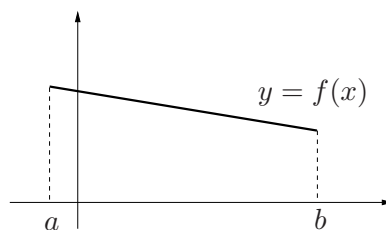
Vi kan även rita upp funktionsgrafer för funktioner $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ där X en delmängd av $\mathbb{R}$. För detta kompendium kommer X oftast vara ett slutet intervall, det vill säga mängden av alla tal mellan två fixerade tal.

Definition 3.1.1. Givet två tal $a \leq b$ definierar vi det *slutna intervallet från a till b* som mängden $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Funktionsgraf av en funktion från ett slutet intervall $[a, b]$ till $\mathbb{R}$ ser ut som en funktionsgraf av en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ men bara över de x som ligger mellan a och b på x -axeln.



Figur 3.2: En funktionsgraf till en funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ligger mellan a och b på x -axeln.



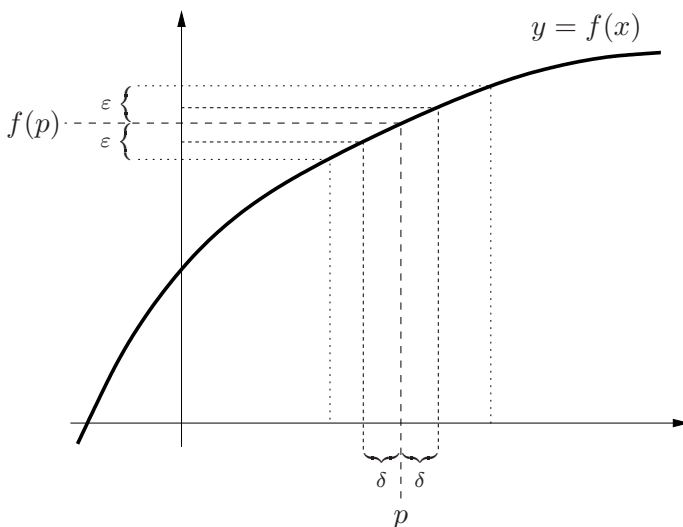
Figur 3.3: Om funktionsgrafen till $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är ett rakt streck kallas det för ett *linjesegment*.

3.2 Kontinuerliga funktioner

Definition 3.2.1. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är *kontinuerlig i en punkt* $p \in X$ om det för varje givet $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ så att alla $x \in X$ med $|x - p| < \delta$ uppfyller att $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje punkt $p \in X$.

Anmärkning 3.2.2. Som i Kapitel 2 vill vi här betona att man inte ska låta sig förvirras av symbolerna ε och δ . De är standardbeteckningar för ”små tal” och inget annat. Precis som med ε så är tecknet δ en grekisk bokstav och uttalas ”delta”.

Definitionen ovan står nog i behov av förklarande kommentarer. Givet en funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fixerar vi en punkt $p \in X \subseteq \mathbb{R}$ och väljer ett tal $\varepsilon > 0$. Det ska då finnas ett avstånd δ från p på x -axeln så att punkter x med avstånd mindre än δ från p uppfyller att funktionsvärdet $f(x)$ har avstånd mindre än ε från $f(p)$. Funktionen f är kontinuerlig i punkten p om det alltid går att hitta ett sådant litet positivt tal δ , oavsett hur litet ε är. Med andra ord är f kontinuerlig i p om vi kan komma så nära funktionsvärdet $f(p)$ på y -axeln som vi vill, om vi bara går tillräckligt nära p på x -axeln.



Vi uppmanar här läsaren att rita en godtycklig funktionsgraf – grafen behöver inte motsvara någon funktion som läsaren kan formeln till – utan att lyfta

pennan från pappret och göra en visuell verifiering av ovanstående egenskap för funktionen.

Exempel 3.2.3. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $f(x) = 2x + 3$ är kontinuerlig. För att visa detta: Tag en punkt $p \in \mathbb{R}$. För varje givet $\varepsilon > 0$ kan vi låta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Då gäller nämligen att

$$|f(x) - f(p)| = |(2x + 3) - (2p + 3)| = |2x - 2p| = 2|x - p| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

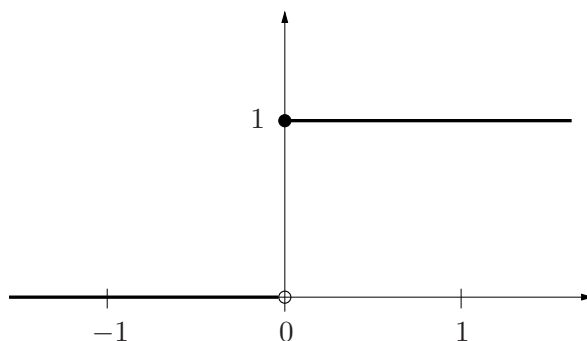
om $|x - p| < \delta$. Eftersom vi kan göra detta för varje $p \in \mathbb{R}$ så är f kontinuerlig överallt. ▲

Anmärkning 3.2.4. Notera att vi även här använt tekniken från matlagningsprogram – som vi förklarade i Anmärkning 2.2.9 – och i förväg hittat ett $\delta > 0$ som fungerar. Att hitta ett δ som uppfyller de önskade olikheterna är ofta svårigheten i bevis om kontinuitet. I exemplet ovan skulle vi till exempel även kunna välja $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ eller vilket positivt tal som helst mindre än $\frac{\varepsilon}{2}$.

Exempel 3.2.5. Trappstegsfunktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad via

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0, \\ 0 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Om vi ritar upp funktionsgrafen till denna funktion får vi figuren nedan.



Denna funktion är inte kontinuerlig i $p = 0$. För att visa detta behöver vi finna ett $\varepsilon > 0$ för vilket det *inte* existerar något $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $|x - 0| < \delta$.

Välj $\varepsilon = \frac{1}{2}$. För varje $\delta > 0$ kan vi låta $x = -\frac{\delta}{2}$. Då gäller att $|x - 0| = |x| = |-\frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$ men $|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$. Detta visar att f inte är kontinuerlig i $p = 0$. ▲

Detta exempel visade upp en funktion som inte var kontinuerlig i *en* punkt. Det finns faktiskt funktioner som inte är kontinuerliga i *någon* punkt. Här kommer ett exempel.

Exempel 3.2.6. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Denna funktion kallas för *Dirichlets funktion* och är ett exempel på en funktion som inte är kontinuerlig någonstans. Vi utelämnar beviset för detta. ▲

Följande sats ger ett villkor för kontinuitet som möjligtvis kan kännas mer intuitivt än Definition 3.2.1.

Sats 3.2.7. *Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $p \in X$ om och endast om det för varje talföljd (x_n) i X som konvergerar mot p gäller att*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p).$$

Bevis. Vi ska här visa att två påståenden är ekvivalenta. Detta gör vi genom att först anta att det ena påståendet är sant och visa att det implicerar det andra påståendet, och sedan vice versa.

Låt först f vara kontinuerlig i punkten p och tag $\varepsilon > 0$. Det finns då ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ för alla $x \in X$ som uppfyller $|x - p| < \delta$. Låt (x_n) vara en följd som konvergerar mot p . Eftersom $\delta > 0$ så finns, enligt definitionen för konvergens, ett $N \geq 1$ så att $|x_n - p| < \delta$ för alla $n \geq N$. Det följer att $|f(x_n) - f(p)| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Detta visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$.

Låt nu istället f vara en funktion med egenskapen att $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$ för alla följder (x_n) som konvergerar mot p . Vi behöver visa att f uppfyller Definition 3.2.1 för kontinuitet i p . Vi antar nu motsatsen, det vill säga att f inte är kontinuerlig i p . Det betyder att det finns ett $\varepsilon > 0$ så att, för varje $\delta > 0$, finns något $x \in X$ med $|x - p| < \delta$ men $|f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$. Speciellt finns det då för alla $n \geq 1$ något $x_n \in X$ med $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ och $|f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$. Följden (x_n) konvergerar då mot p men $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(p)$, vilket motsäger egenskapen som f har. Alltså är antagandet att f inte är kontinuerlig i p falskt, så f är kontinuerlig i p . □

Exempel 3.2.8. Ett linjesegment $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, det vill säga en funktion $f(x) = kx + m$ med $k, m \in \mathbb{R}$, är kontinuerlig. För att visa detta, tag $p \in [a, b]$ och låt (x_n) vara en talföljd som konvergerar mot p . Med hjälp av Sats 2.3.1 får vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n + m) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + m = kp + m = f(p),$$

så f är kontinuerlig i p enligt Sats 3.2.7. Då $p \in [a, b]$ var godtycklig gäller detta för alla tal i $[a, b]$ så f är därför kontinuerlig. ▲

Exempel 3.2.9. Låt oss titta på trappstegsfunktionen f från Exempel 3.2.5 igen. Låt (x_n) vara talföljden som ges av $x_n = -\frac{1}{n}$ för $n \geq 1$. Varje term i följderna är negativ och följderna konvergerar mot 0. Därmed är $f(x_n) = 0$ för varje n , så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq 1 = f(0).$$

Enligt Sats 3.2.7 ser vi därför återigen att f inte är kontinuerlig i $p = 0$. ▲

Anmärkning 3.2.10. Ett annat sätt att formulera Sats 3.2.7 är att säga att en funktion f är kontinuerlig i en punkt p om och endast om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

för varje följd (x_n) som konvergerar mot p .

3.3 Unioner av funktionsgrafer

Sats 3.3.1. Låt $f_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ och $f_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner där $a < b < c$. Funktionen $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ som är definierad via

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{om } a \leq x \leq b, \\ f_2(x) & \text{om } b < x \leq c \end{cases}$$

är då kontinuerlig om och endast om $f_1(b) = f_2(b)$.

Bevis. Tag ett $p \in [a, c]$. Om $p \neq b$ så ligger p i precis ett av intervallen $[a, b]$ och $[b, c]$. Eftersom både f_1 och f_2 är kontinuerliga så följer det att f är kontinuerlig i p . Det är alltså klart att $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i alla punkter utom b . Eftersom $f_1(b) = f(b)$ återstår därför att visa att f är kontinuerlig i b om och endast om $f(b) = f_2(b)$.

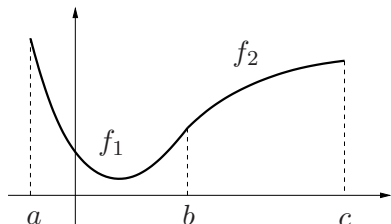
Antag att f är kontinuerlig i b . Låt följden (x_n) vara definierad av $x_n = b + \frac{1}{n}$ för alla $n \geq 1$. Då gäller att $x_n > b$ för alla n så $f(x_n) = f_2(x_n)$. Eftersom både f och f_2 är kontinuerliga följer från Sats 3.2.7 att

$$f_2(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(b).$$

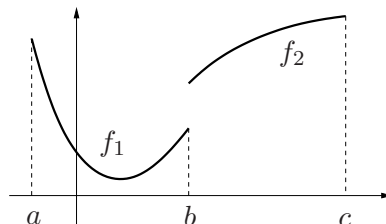
Alltså, om f är kontinuerlig i b så är $f_2(b) = f(b)$.

Antag nu istället att $f(b) = f_1(b) \neq f_2(b)$. Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom f_1 är kontinuerlig finns $\delta_1 > 0$ så att $|f_1(x) - f_1(b)| < \varepsilon$ för alla $x \in [a, b]$ med $|x - b| < \delta_1$. Med andra ord är $|f_1(x) - f_1(b)| < \varepsilon$ om $b - \delta_1 < x \leq b$. På samma sätt är f_2 kontinuerlig så det finns $\delta_2 > 0$ så att $|f_2(x) - f_2(b)| < \varepsilon$ för alla x som uppfyller $b \leq x < b + \delta_2$. Sätt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Då gäller att $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ för alla $x \in [a, c]$ med $|x - b| < \delta$, det vill säga att f är kontinuerlig i b . $\square$

Det som satsen säger är helt enkelt att en funktion vars funktionsgraf är unionen av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig om och endast om dessa två grafer sitter ihop.



Figur 3.4: Ett exempel på en kontinuerlig funktion



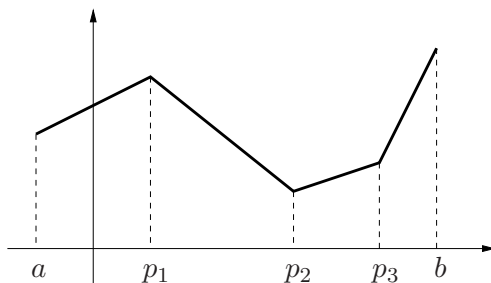
Figur 3.5: Ett exempel på en icke-kontinuerlig funktion

De geometriska figurer vi kommer intressera oss mest för framöver är uppbyggda av flera linjesegment. Vi avslutar därför detta kapitel med att visa att sådana figurer ges av kontinuerliga funktioner.

Exempel 3.3.2. Att linjesegment är kontinuerliga vet vi från Exempel 3.2.8. En funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vars funktionsgraf består av n stycken sammanhängande linjesegment är också kontinuerlig. För att visa detta tar vi $p \in [a, b]$. Det finns då två möjligheter; antingen svarar p mot en punkt på ett unikt linjesegment eller så svarar p mot en skärningspunkt mellan två linjesegment.

Om p svarar mot en punkt på ett unikt linjesegment så är f kontinuerlig i p eftersom linjesegment är kontinuerliga. I fallet då p svarar mot en skärningspunkt så följer det från Sats 3.3.1 att f är kontinuerlig i p eftersom de två linjesegmenten sitter ihop.

Alltså är f kontinuerlig i p för varje $p \in [a, b]$, så f är kontinuerlig.

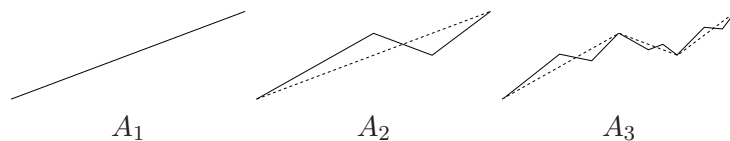


Figur 3.6: Funktionsgrafen av en funktion som är kontinuerlig eftersom grafen är en union av sammanhängande linjesegment.

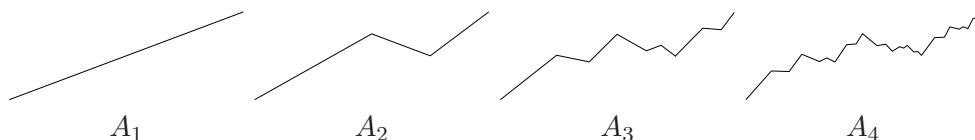


Vi avslutar detta kapitel med ett fraktalexempel.

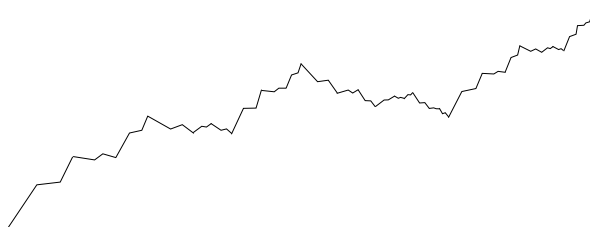
Exempel 3.3.3. Låt oss titta på ett linjesegment som vi kallar för A_1 . Genom att byta ut detta linjesegment mot tre mindre linjesegment som i bilden nedan skapar vi en ny figur A_2 . Byter vi därefter ut varje linjesegment i A_2 mot en mindre kopia av A_2 – där de linjesegment med negativ lutning byts ut mot en speglad version av A_2 – så skapas ännu en figur A_3 .



Genom att upprepa denna procedur får vi en följd (A_n) av figurer, varav de första fyra termerna visas nedan.



Enligt Exempel 3.3.2 är alla dessa figurer grafer till en kontinuerlig funktion eftersom de består av sammanhängande linjesegment. På samma sätt som med Sierpinski-triangeln kan man visa att denna följd kommer att ”konvergera” mot en figur. Denna figur är uppbyggd av mindre kopior av sig själv och har därför en fraktal struktur. Vi kan approximera denna figur med den femte termen i följd.



A_5

Jämför man denna figur med bilderna i ekonomidelen av en valfri nyhetstidning kan man se att A_5 har flera likheter med grafen till en akties värdesförändring över ett tidsintervall. En modell för att beskriva aktiemarknaden säger till och med omvändningen, att grafen till en akties värde ofta har en fraktal struktur. Med andra ord, de uppgångar och nedgångar som sker på ett kort tidsintervall upprepar sig även under längre intervall. En antydning till detta är att om man tittar på grafen till en aktie som inte har markerat enheten på sina axlar så kan det vara väldigt svårt att se om tidsintervallet ges av några minuter, en dag, en vecka, eller till och med ett år. Strukturen på graferna ser väldigt lika ut. Att finansiella marknader uppvisar ett fraktalt beteende är ursprungligen en av Mandelbrots insikter.

Läsaren bör dock *inte* ta detta som något idiotsäkert sätt att sja om aktiemarknaden i hopp om att kunna säkra sin framtida ekonomi. Matematiska modeller kan enbart beskriva verkligheten till en viss grad, och avvikelser förekommer till stort förtret för ens plånbok. ▲

Övningar

Övning 3.1 (★). Rita upp funktionsgrafen till funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ med

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ x - \frac{1}{4} & \text{om } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4} - x & \text{om } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{om } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$

Övning 3.2 (★). (i) Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av $f(x) = 5x + 1$. Visa att f är kontinuerlig direkt från definitionen av kontinuitet.

(ii) Låt nu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av $f(x) = kx + m$ där $k, m \in \mathbb{R}$ och $k \neq 0$. Vad behöver ändras i beviset ovan för att visa att f är kontinuerlig? Är värdet på k eller m av betydelse?

Övning 3.3 (★). Visa att funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är kontinuerlig i $x = 0$. (*Anmärkning:* man kan visa att f är kontinuerlig i alla punkter.)

Övning 3.4 (★). Visa att funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $f(x) = x^4 + 1$ är kontinuerlig i $x = 0$. (*Anmärkning:* man kan visa att f är kontinuerlig i alla punkter.)

Övning 3.5 (★★★). Låt $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ och låt $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av $f(x) = \frac{1}{x}$. Visa att f är kontinuerlig i varje punkt $p \in X$.

Övning 3.6 (★). Är funktionen f från Övning 3.1 kontinuerlig?

Övning 3.7 (★★). Låt $X \subseteq \mathbb{R}$. Antag att $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ är två kontinuerliga funktioner. Visa att funktionen $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $h(x) = f(x) + g(x)$ är kontinuerlig.

Övning 3.8 (★★). Låt $X \subseteq \mathbb{R}$. Antag att $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion och tag ett $c \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $h(x) = c \cdot f(x)$ är kontinuerlig.

Övning 3.9 (★★). Är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} + 1 & \text{om } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

kontinuerlig? (*Ledning:* Använd övningarna ovan.)

Övning 3.10 (★★★). Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner. Visa att funktionen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som är definierad av sammansättningen $h(x) = f(g(x))$, är kontinuerlig. Visa detta på två sätt, det ena med hjälp av Sats 3.2.7 och det andra direkt från definitionen av kontinuitet.

4 Talplanet och bilder av funktioner

I detta kapitel introducerar vi *talplanet* $\mathbb{R}^2$ och går igenom normer som är en generalisering av absolutbeloppet. Vi studerar även funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ och definierar vad det betyder att en sådan funktion F är kontinuerlig. Flera resultat från Kapitel 3 går att generalisera till denna situation.

Funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kommer vi senare använda för att rita upp de fraktaler vi vill studera.

4.1 Funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$

Definition 4.1.1. *Talplanet*, alternativt det *euklidiska planet*, är mängden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

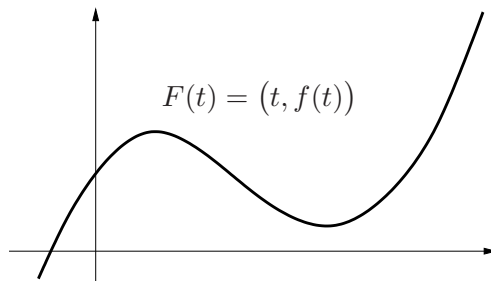
som består av alla ordnade par (x, y) av reella tal x och y .

Att rita upp en figur i två dimensioner görs matematiskt genom att markera en delmängd av mängden $\mathbb{R}^2$. I Kapitel 3 ritade vi upp funktionsgrafer till funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dessa ritades också upp i $\mathbb{R}^2$, trots att sådana funktioner enbart tar värden i $\mathbb{R}$. Detta är möjligt eftersom grafen till en funktion f är mängden $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, vilket är en delmängd av $\mathbb{R}^2$. Från denna beskrivning ser vi att en funktionsgraf har ett unikt y -värde för varje x -värde. En konsekvens av detta är att man till exempel inte kan rita upp en cirkel som grafen av en funktion.

Vi vill nu istället studera funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, det vill säga funktioner F som tar ett reellt tal t och ger en punkt $F(t) = (x, y)$ i $\mathbb{R}^2$. Om X är en delmängd av $\mathbb{R}$ kan vi även titta på funktioner $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definition 4.1.2. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. *Bilden* av en funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ är mängden $\text{Bild}(F) = \{F(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in X\}$.

Exempel 4.1.3. Låt $F(t) = (t, t^3 - 3t^2 + t + 1)$ för varje $t \in \mathbb{R}$. Då är bilden av F samma figur som funktionsgrafen av funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $f(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + 1$.

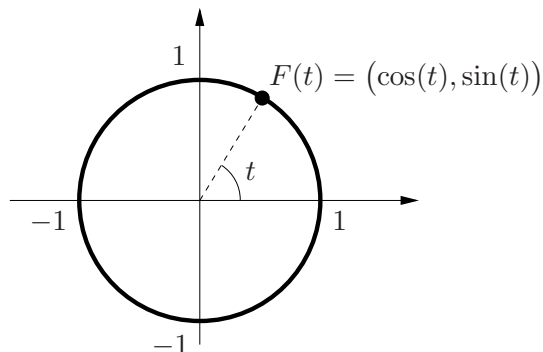


Figur 4.1: Bilden till funktionen F är lika med funktionsgrafen av funktionen f .

I allmänhet gäller att funktionsgrafer av funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är specialfall av bilder av funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ där vi låter $F(t) = (t, f(t))$. ▲

Genom att betrakta bilder av funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan vi rita upp fler geometriska figurer än de som uppkommer som funktionsgrafer till funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nedan visar vi några exempel.

Exempel 4.1.4. Låt $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad av $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Bilden till denna funktion är cirkeln nedan.

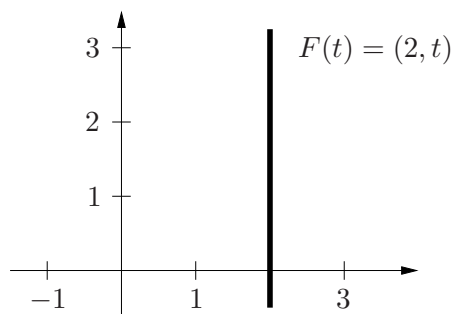


Om läsaren inte är bekant med funktionerna $\sin$ och $\cos$ sedan tidigare behöver man inte lägga någon större tid på detta exempel – dessa funktioner kommer även användas i Anmärkning 4.1.7 och Exempel 4.1.9 men de kommer inte förekomma i någon annan del av texten. ▲

Anmärkning 4.1.5. Vi noterar att en skillnad mellan bilder av funktioner och funktionsgrafer är att tal på x -axeln i en bild inte kan tolkas funktionens invärden. I Exempel 4.1.4 är det istället vinkeln som är funktionens invärde. Eftersom invärdet till en funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ inte längre behöver svara mot x -koordinaten i bilden av funktionen så använder vi oftast t som variabel istället för x .

Vi skriver funktioner som tar värden i $\mathbb{R}^2$ med versaler så som F för att särskilja från funktioner f som tar värden i $\mathbb{R}$. Läsaren ska dock inte blanda ihop detta med primitiva funktioner som också brukar skrivas med versaler. Dessa begrepp har ingenting gemensamt.

Exempel 4.1.6. Vi kan även rita lodräta linjer som bilder av funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Om $F(t) = (2, t)$ för varje $t \in \mathbb{R}$ så är bilden av F den lodräta linjen nedan.



▲

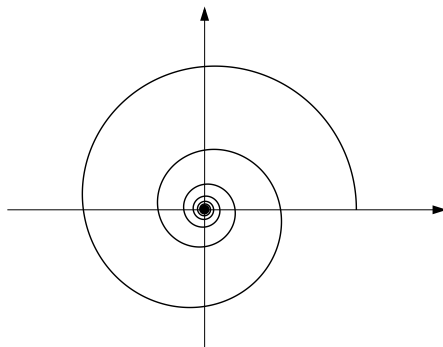
Exemplen ovan visar att vi har möjlighet att rita upp fler sorters figurer genom att betrakta funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ istället för funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Anmärkning 4.1.7. Notera att olika funktioner kan ha samma bild. Vi såg i Exempel 4.1.4 att cirkeln med radie 1 och mittpunkt i origo var lika med bilden av funktionen $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ för $t \in \mathbb{R}$. Använder vi grader som vinkelenhet så är bilden av funktionen $G(t) = (\cos(t + 90^\circ), \sin(t + 90^\circ))$ lika med samma cirkel, men $F(t) \neq G(t)$ för något $t \in \mathbb{R}$ eftersom punkten $G(t)$ alltid ligger 90° moturs från punkt $F(t)$.

Exempel 4.1.8. Låt $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad av $F(t) = (1, 1)$ för $t \in \mathbb{R}$. Då består bilden av F enbart av punkten $(1, 1)$. ▲

Funktioner $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ kommer vi kunna använda för att rita upp flera olika fraktaler som vi vill studera. Ett exempel på en fraktal som kan ritas upp med en sådan funktion är följande.

Exempel 4.1.9. Låt $X = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ och låt $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad av $F(t) = \left(\frac{\cos(t)}{t^2+360^2}, \frac{\sin(t)}{t^2+360^2} \right)$. Då blir bilden av F figuren nedan.

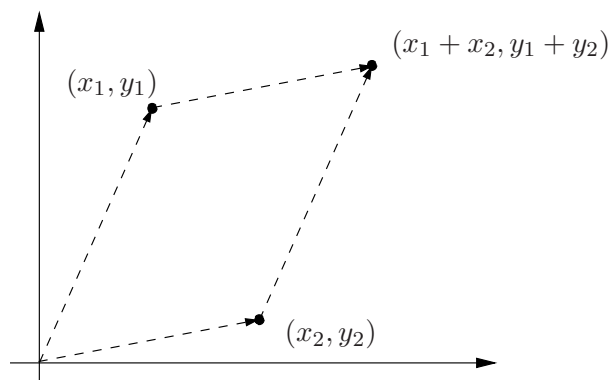


Denna figur är spiralformad och går ett varv runt origo varje gång t växer med 360° samtidigt som dess avstånd till origo blir mindre och mindre. Oavsett hur mycket vi förstörar upp figuren i origo kommer den alltid se likadan ut. Denna spiral har nämligen en fraktal struktur. Notera också att figuren är en relativt bra modell för ett snäckskal. ▲

4.2 Normer och avstånd

Än så länge har vi enbart betraktat talplanet som en mängd att rita upp våra figurer i, men $\mathbb{R}^2$ har mer struktur – vilket vi kommer studera nu.

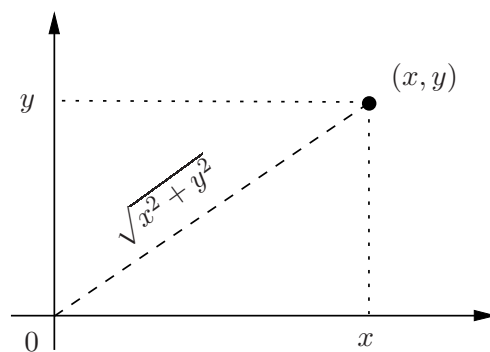
Precis som med tal i $\mathbb{R}$ kan vi addera och subtrahera punkter i $\mathbb{R}^2$. Givet punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) definierar vi $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Subtraktion definieras analogt som $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Båda dessa operationer kan förklaras geometriskt. Till exempel kan additionen förklaras genom följande figur.



Figur 4.2: En geometrisk beskrivning av summan av två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i $\mathbb{R}^2$. Genom att ta pilen från origo till punkten (x_2, y_2) och parallellförflytta den så att den startar i punkten (x_1, y_1) så kommer den sluta i punkten $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Det blir samma resultat om man istället börjar med linjen från origo till (x_1, y_1) och parallellförflyttar den så att den startar i punkten (x_2, y_2) .

Vi vill senare i detta kapitel definiera kontinuitet av funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. För att göra detta behöver vi ett begrepp som avgör hur nära två punkter ligger varandra. När vi i Kapitel 2 pratade om konvergens av talföljder så använde vi absolutbeloppet som ett redskap för att beskriva avståndet mellan två tal. Vi kommer nu ge en annan beskrivning av absolutbeloppet – en beskrivning som är enklare att generalisera. Kvadratroten $\sqrt{a}$ ur ett positivt tal a är definierat som det *positiva* talet b så att $b^2 = a$. Vi har därmed att absolutbeloppet av ett tal $x \in \mathbb{R}$ är $|x| = \sqrt{x^2}$. Punkter i $\mathbb{R}^2$ består av ordnade par (x, y) , och för dessa gör vi nu följande generalisering av absolutbeloppet.

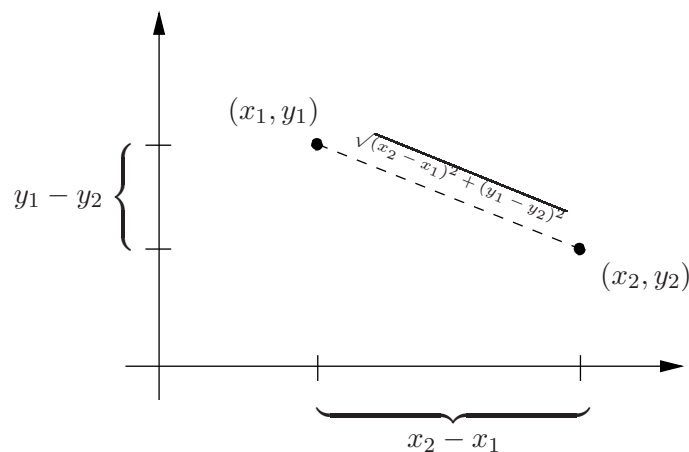
Definition 4.2.1. *Normen* av en punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ är $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Figur 4.3: Pythagoras sats visar att normen $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ är lika med avståndet från (x, y) till origo.

Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ges av normen av differensen $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, som är

$$\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

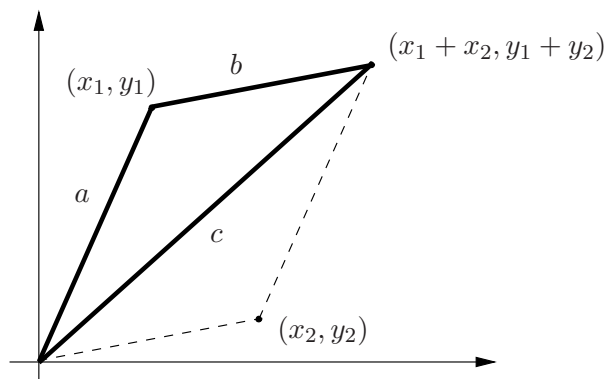


Figur 4.4: Pythagoras sats visar att normen av $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ är lika med avståndet mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) .

Sats 4.2.2 (Triangelolikheten). Låt (x_1, y_1) och (x_2, y_2) vara två punkter i $\mathbb{R}^2$. Då gäller att

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| \leq \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|.$$

Bevis. Låt $a = \|(x_1, y_1)\|$, $b = \|(x_2, y_2)\|$ och $c = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|$. Då kan vi rita upp triangeln nedan.



Vi behöver alltså visa att sidorna i denna triangel uppfyller att $c \leq a + b$. Eftersom det kortaste avståndet mellan två punkter är en rak linje så följer därför resultatet direkt. $\square$

Anmärkning 4.2.3. Detta bevis motiverar också namnet *triangelolikheten*. Beviset gäller för alla val av (x_1, y_1) och (x_2, y_2) , men i fallet då punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ligger på en linje genom origo blir motsvarande triangeln aningen förvirrande. Att förstå denna figur är Övning 4.7.

4.3 Kurvor

Med hjälp av avståndsbegreppet som vi definierade i föregående avsnitt är vi nu redo att generalisera begreppet kontinuitet till funktioner $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Läsaren uppmanas att jämföra följande definition med Definition 3.2.1.

Definition 4.3.1. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ är *kontinuerlig i en punkt* $p \in X$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ så att alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$ uppfyller att $\|F(t) - F(p)\| < \varepsilon$. Funktionen $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje punkt $p \in X$.

Definition 4.3.2. En *kurva* är en kontinuerlig funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. En *kurva med ändpunkter* är en kontinuerlig funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ för några reella tal $a < b$.

Exempel 4.3.3. Vi såg i det förra kapitlet att funktioner vars funktionsgrafer är linjer är kontinuerliga. Den enda typen av linjer som inte ges av funktionsgrafer är lodräta linjer. Dessa är istället bilder av funktioner $F(t) = (a, t)$ för något $a \in \mathbb{R}$. Sådana funktioner är också kontinuerliga, vilket vi visar nu. Tag ett $p \in \mathbb{R}$ och fixera $\varepsilon > 0$. Låt $\delta = \varepsilon$. Då gäller att

$$\|F(t) - F(p)\| = \|(a, t) - (a, p)\| = \|(0, t - p)\| = \sqrt{0^2 + (t - p)^2} = |t - p| < \varepsilon$$

för alla $t \in \mathbb{R}$ med $|t - p| < \delta = \varepsilon$. ▲

Exempel 4.3.4. Funktionen $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$ från Exempel 4.1.4 är kontinuerlig. Ett sätt att visa detta på är genom att använda vissa trigonometriska identiteter vi ej gått igenom i detta kompendium, och vi utelämnar därför beviset för detta. ▲

Vi visar nu en generalisering av Sats 3.2.7.

Sats 4.3.5. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$ och låt $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en funktion. Då gäller att F är kontinuerlig i en punkt $p \in X$ om och endast om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = F(p)$$

för varje talföljd (t_n) i X som konvergerar mot p .

Bevis. Låt först F vara kontinuerlig i punkten p och tag $\varepsilon > 0$. Det finns då ett $\delta > 0$ så att $\|F(t) - F(p)\| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ som uppfyller $|t - p| < \delta$. Låt (t_n) vara en följd som konvergerar mot p . Eftersom $\delta > 0$ så finns, enligt definitionen för konvergens, ett $N \geq 1$ så att $|t_n - p| < \delta$ för alla $n \geq N$. Det följer att $\|F(t_n) - F(p)\| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Detta visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(p)$.

Låt nu istället F vara en funktion med egenskapen att $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(p)$ för alla följder (t_n) som konvergerar mot p . Vi behöver visa att F uppfyller Definition 4.3.1 för kontinuitet i p . Vi antar nu motsatsen, det vill säga att F inte är kontinuerlig i p . Det betyder att det finns ett $\varepsilon > 0$ så att, för varje $\delta > 0$, finns något $t \in X$ med $|t - p| < \delta$ men $\|F(t) - F(p)\| \geq \varepsilon$. Speciellt finns det då för alla $n \geq 1$ något $t_n \in X$ med $|t_n - p| < \frac{1}{n}$ och $\|F(t_n) - F(p)\| \geq \varepsilon$. Följden (t_n) konvergerar då mot p men $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) \neq F(p)$, vilket motsäger egenskapen som F har. Alltså måste antagandet att F inte är kontinuerlig i p vara falskt, så F är kontinuerlig i p . □

Anmärkning 4.3.6. Notera att ovanstående bevis nästan är ord för ord identiskt med beviset av Sats 3.2.7. Beviset av nästa sats är på samma sätt väldigt likt beviset av Sats 3.3.1, och vi lämnar det därför som en övning.

Sats 4.3.7. Låt $F_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $F_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara två kurvor med ändpunkter där $a < b < c$. Då är funktionen $F: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definierad som

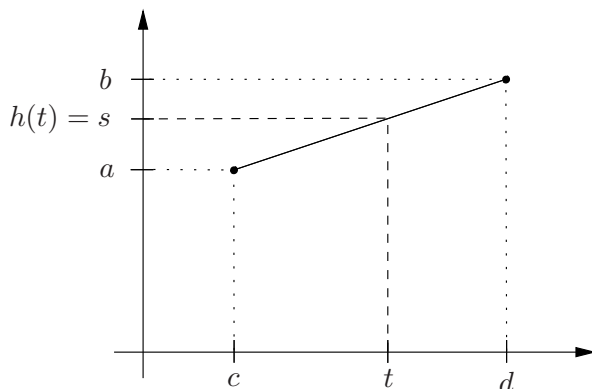
$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{om } a \leq t \leq b, \\ F_2(t) & \text{om } b < t \leq c \end{cases}$$

kontinuerlig om och endast om $F_1(b) = F_2(b)$.

Bevis. Se Övning 4.5. □

Sats 4.3.8. Låt $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en kurva med ändpunkter. För varje par $c, d \in \mathbb{R}$ med $c < d$ finns en kurva med ändpunkter $G: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ så att $\text{Bild}(F) = \text{Bild}(G)$.

Bevis. Tag två tal $c < d$ och definiera $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ som linjesegmentet med följande funktionsgraf.



Man kan visa att h ges av formeln $h(t) = a + \frac{t-c}{d-c} \cdot (b-a)$ för alla $t \in [c, d]$, men detta kommer vi inte behöva. Låt nu $G: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieras via $G(t) = F(h(t))$ för alla $t \in [c, d]$. För att visa att $\text{Bild}(F) = \text{Bild}(G)$ visar vi att dessa två mängder är delmängder av varandra.

Börja med att ta en punkt $(x, y) \in \text{Bild}(G)$. Då finns ett $t \in [c, d]$ så att $G(t) = (x, y)$. Låt $s = h(t) \in [a, b]$. Per definition av G gäller då att

$$(x, y) = G(t) = F(s).$$

Det betyder att $(x, y) \in \text{Bild}(F)$ så $\text{Bild}(G) \subseteq \text{Bild}(F)$.

Tag nu omvänt ett $(x, y) \in \text{Bild}(F)$. Då finns ett $s \in [a, b]$ så att $F(s) = (x, y)$. Vi ser från figuren ovan att eftersom $s \in [a, b]$ finns ett $t \in [c, d]$ så att $h(t) = s$. Läsaren som inte förlitar sig på bilder kan kontrollera att $t = \frac{s-a}{b-a} \cdot (d-c) + c$ uppfyller $h(t) = s$. För detta t gäller alltså att

$$G(t) = F(h(t)) = F(s) = (x, y).$$

Därmed gäller att $(x, y) \in \text{Bild}(G)$ så $\text{Bild}(F) \subseteq \text{Bild}(G)$. Dessa två mängder är alltså delmängder av varandra vilket betyder att $\text{Bild}(F) = \text{Bild}(G)$.

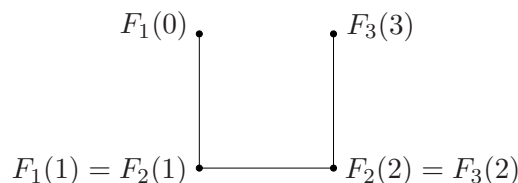
Det återstår att visa att G verkligen är en kurva, det vill säga att G är kontinuerlig. Funktionen h är ett linjesegment och är kontinuerlig enligt Exempel 3.2.8. Således är $G(t) = F(h(t))$ en sammansättning av två kontinuerliga funktioner och ett resonemang liknande det i Övning 3.10 visar att G är kontinuerlig. $\square$

Följande exempel är viktigt då det förklarar varför alla de funktioner vi kommer studera i de kommande kapitlen är kontinuerliga.

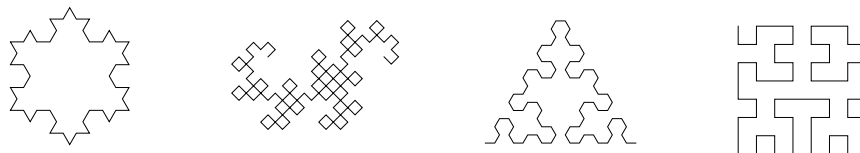
Exempel 4.3.9. Fixera ett heltal $n \geq 1$ och Låt $F_i: [i-1, i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett linjesegment för varje $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Med andra ord, tag en samling av funktioner

$$F_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F_2: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \dots, \quad F_n: [n-1, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

vars bilder alla är linjesegment. Antag också att $F_i(i) = F_{i+1}(i)$ för varje $i = 1, 2, \dots, n-1$. Till exempel gäller att $F_1(1) = F_2(1)$. Notera att $F_1(1)$ är ena ändpunkten av linjesegmentet F_1 och att $F_2(1)$ är ena ändpunkten av linjesegmentet F_2 . Kravet att $F_1(1) = F_2(1)$ betyder alltså att de två linjesegmenten F_1 och F_2 möts i varsin ändpunkt. Då vi även kräver att $F_2(2) = F_3(2)$ så gäller att den andra ändpunkten av F_2 sitter ihop med linjesegmentet F_3 , som i sin tur sitter ihop med F_4 . Dessa linjesegment sitter alltså ihop i en ”kedja”. Ett enkelt exempel på en sådan kedja ser vi i följande bild.



Låt $F: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara funktionen definierad av $F(t) = F_i(t)$ om $t \in [i-1, i]$. Eftersom linjesegmenten sitter ihop så följer det från Sats 4.3.7 att F är kontinuerlig, och vi kallar F för en *union av linjesegment*. Bilden av F är kedjan av linjesegment $F_1, F_2, \dots, F_n$. Här är några exempel på bilder av kontinuerliga funktioner som vi kan skapa på detta sätt.



Alla dessa fyra figurer ger upphov till fraktala strukturer och vi kommer se mer av dem i Kapitel 5 och 6. Vidare gäller att alla dessa figurer är bilder av kurvor på formen $F: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ där n är antalet linjesegment i bilden. Enligt Sats 4.3.8 kan vi välja andra kurvor $G: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, för vilka tal $c < d$ som helst, så att G har samma bild som F . Speciellt kan vi, av bekvämlighetsskäl, anta att alla dessa figurer är bilder av kontinuerliga funktioner på formen $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. $\blacktriangle$

4.4 Dimensionsbegreppet

Vi kommer i Kapitel 6 gå igenom något som kallas för *fraktal* dimension. För att kunna förklara varför detta är spännande vill vi här ge en kort introduktion till det klassiska dimensionsbegreppet. Att ge en rigorös definition av dimension är dock svårt. Vi har därför valt att här enbart ge en informell beskrivning.

I vardagligt tal brukar man säga att vi lever i en tredimensionell värld. Vad betyder det egentligen? I matematiken brukar man tänka på dimensionen av en geometrisk figur som det *minsta antalet parametrar* som behövs för att bestämma en punkts position i figuren.

Exempel 4.4.1. En linje kan modelleras med tallinjen $\mathbb{R}$, och positionen av en punkt på denna linje ges av värdet i punkten. En linje är därmed endimensionell. ▲

Exempel 4.4.2. En plan yta kan beskrivas av talplanet $\mathbb{R}^2$. Positionen av en punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bestäms av sitt x -värde och sitt y -värde. Ett plan är därmed tvådimensionellt – det har både en bredd och en höjd. ▲

Exempel 4.4.3. Vår verklighet består av både en bredd, en höjd och ett djup så *rummet* vi lever i brukar därför kallas för tredimensionellt. Detta rum kan modelleras med mängden $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Då de flesta punkterna i vår värld flyttar på sig då tiden förändras brukar man i fysiken även lägga in en tidsparameter och betrakta vår verklighet som fyrdimensionell. ▲

Exempel 4.4.4. En punkt är nolldimensionell eftersom det inte behövs några parametrar för att beskriva var någon punkt på punkten är – det finns bara en punkt. ▲

Vidare vill vi att dimensionen av en figur ska vara *invariant* under små modifieringar av figuren, vilket betyder att dimensionen inte ändras när vi vrider och drar i figuren. Som exempel kan man tänka på ett snöre. Om snöret ligger helt utsträckt så är snöret en rak linje som är endimensionell. Om man skulle ta och böja på snöret så skulle vi vilja att dess dimension bevaras. Positionen av en punkt på snöret kan alltid bestämmas av hur långt in på snöret från ena änden som punkten är, och därför är snöret alltid endimensionellt, även om vi skulle böja det eller göra en knut på det.

På samma sätt ser vi att bilden av en kurva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan beskrivas av bara en parameter – positionen av en punkt $F(t)$ i bilden av F ges av parametern t .

Exempel 4.4.5. Cirkeln från Exempel 4.1.4 är endimensionell. Varje punkt på cirkeln är unikt bestämd av vinkeln från x -axeln. Vi behöver alltså bara en parameter för att beskriva en punkts position, trots att cirkeln ligger i det tvådimensionella planet $\mathbb{R}^2$. ▲

Naivt skulle man kunna förvänta sig att bilden av en funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ alltid skulle vara endimensionell. Så är dock inte fallet; om $F(t) = (0, 0)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ så är bilden bara en punkt – som är nolldimensionell. Matematiker under 1800-talets andra hälft hade inte en rigorös definition av ”dimension”,

men de använde ändå ordet ofta, förstått på samma intuitiva sätt som vi använt det här. Exemplet med $F(t) = (0, 0)$ ovan visar att en kurva kan ha dimension som är *lägre* än 1, men det är osannolikt att någon av dåtidens matematiker förväntade sig att en kurva skulle kunna ha en dimension som är *högre* än 1. Dock är just detta möjligt, vilket den italienska matematikern Guiseppe Peano visade med ett exempel år 1890. Vi återkommer till detta i Kapitel 6. Detta visar att begreppet dimension är tämligen subtilt.

Anmärkning 4.4.6. Även om den informella förklaringen vi gett här har problem så är resultaten i de exempel vi nämnt ovan korrekta, med dimensionsbegreppet som kallas för *topologisk dimension*.

Övningar

Övning 4.1 (★). Rita bilden till funktionen $F(t) = (t^2, t)$ för $-1 \leq t \leq 1$.

Övning 4.2 (★). Rita bilden av funktionen $F: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ som är definierad av

$$F(t) = \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & 1 < t \leq 2 \\ (3-t, 1) & 2 < t \leq 3 \\ (0, 4-t) & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

Övning 4.3 (★). Markera punkterna $(2, 3)$ och $(-1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$. Vad är avståndet mellan punkterna? Rita upp en bild som förklarar varför normen av differensen är lika med avståndet.

Övning 4.4 (★★). Visa att avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är noll om och endast om $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Övning 4.5 (★★). Bevisa Sats 4.3.7. (*Ledning*: Jämför beviset av Sats 3.3.1.)

Övning 4.6 (★★). Låt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ vara n stycken punkter i $\mathbb{R}^2$. Visa att

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_i, y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|(x_i, y_i)\|.$$

Övning 4.7 (★★). Rita upp "triangeln" från beviset av Sats 4.2.2 i fallet då $(x_1, y_1) = (4, 2)$ och $(x_2, y_2) = (-2, -1)$. Förklara varför beviset gäller i detta fall.

Övning 4.8 (★★★). När är triangelolikheten en likhet? Med andra ord, för vilka (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| = \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|?$$

Förklara också skillnaden mellan detta och Övning 4.7.

Övning 4.9 (★★★). Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Varje funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ kan skrivas $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$ med funktioner $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$. Visa att F är kontinuerlig om och endast om f_1 och f_2 är kontinuerliga. (*Ledning*: Använd att $|x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$.)

Övning 4.10 (★★). Är funktionen F från Övning 4.2 kontinuerlig?

5 Fraktala kurvor

I detta kapitel kommer vi studera kurvor med fraktala strukturer. Att en kurva har en fraktal struktur betyder att kurvan är uppbyggd av mindre kopior av sig själv. Därför är det naturligt att konstruera fraktala kurvor genom iterativa processer, vilket vi kommer förklara här. På samma sätt som vi i Kapitel 2 studerade konvergens av talföljder kommer vi här studera konvergens av följder av funktioner.

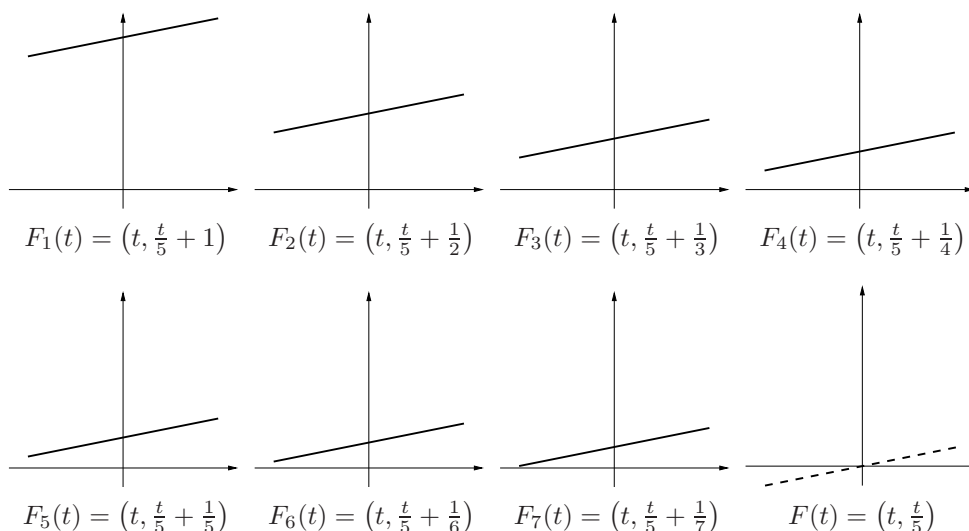
5.1 Konvergens av funktionsföljder

Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En följd av funktioner (F_n) är då en följd $F_1, F_2, F_3, \dots$ så att $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ är en funktion för varje heltal $n \geq 1$. Det finns flera olika konvergensbegrepp för följder av funktioner. Det begrepp vi kommer studera i detta kompendium kallas för *likformig konvergens*.

Definition 5.1.1. Låt $X \subseteq \mathbb{R}$. En följd (F_n) av funktioner $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ konvergerar *likformigt* mot en funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N \geq 1$ så att $\|F(t) - F_n(t)\| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ och $n \geq N$.

Om en följd av funktioner (F_n) konvergerar likformigt mot en funktion F skriver vi $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ eller $F_n \rightarrow F$ då $n \rightarrow \infty$. Vi kallar även F för *gränsfunktionen* av följderna $F_1, F_2, \dots$. Framöver kommer vi, för att lätta upp texten, ofta utelämna adjektivet "likformig" och enbart skriva att en följd av funktioner *konvergerar*.

Exempel 5.1.2. Låt (F_n) vara följderna definierad av $F_n(t) = (t, \frac{t}{5} + \frac{1}{n})$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och $n \geq 1$. För varje n är detta en linje som skär y -axeln på höjd $\frac{1}{n}$. Vi ritar upp bilderna av de första sju funktionerna i denna följd nedan.



Denna följd konvergerar mot funktionen $F(t) = (t, \frac{t}{5})$ som är streckad i bilden ovan. För att visa detta: Tag $\varepsilon > 0$ och låt $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Då gäller att

$$\|F_n(t) - F(t)\| = \|(t, \frac{t}{5} + \frac{1}{n}) - (t, \frac{t}{5})\| = \sqrt{0^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

för varje $n \geq N$ och $t \in \mathbb{R}$. ▲

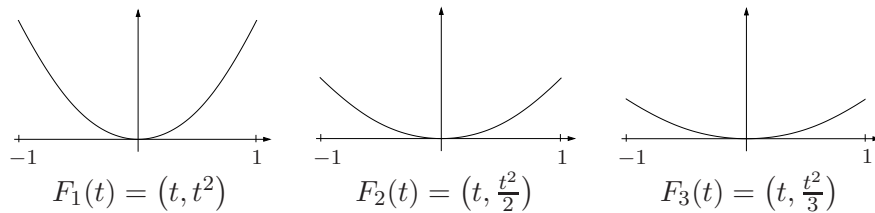
Från exemplet ovan ser vi att man kan få en intuition för en funktionsföljd genom att titta på följderna av funktionernas bilder. En följd av funktioner konvergerar då om följderna av bilder stabiliseras på ett specifikt sätt.

Definition 5.1.1 förklarar vad vi menar när vi säger att en följd av funktioner konvergerar. Läsaren kan ha noterat att en svårighet med konvergensbegreppet från Kapitel 2 är att man först behöver gissa sig till vad gränsvärdet av en följd är innan man kan visa att följderna är konvergent. Denna svårighet är ännu värre i fallet med följderna av funktioner då gränsfunktionen kan vara väldigt svår att skriva ner. En lösning till detta är att det räcker att visa att följderna har följande egenskap.

Definition 5.1.3. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En följd (F_n) av funktioner $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ är en *likformig Cauchyföljd* om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N \geq 1$ så att $\|F_m(t) - F_n(t)\| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ och $m, n \geq N$.

Denna definition säger ingenting om hur följderna är relaterade till någon möjlig gränsfunktion, utan kräver bara att funktionerna i följderna hamnar tillräckligt nära varandra.

Exempel 5.1.4. För varje $n \geq 1$ låter vi $F_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad av $F_n(t) = (t, \frac{t^2}{n})$. Vi ritar här upp bilderna av de första tre termerna i följderna.



Denna följd är en likformig Cauchyföljd. För att visa detta tar vi $\varepsilon > 0$ och låter $N > \frac{2}{\varepsilon}$. För alla $t \in [-1, 1]$ och $m, n \geq 1$ har vi att

$$\|F_m(t) - F_n(t)\| = \left\| \left(t, \frac{t^2}{m} \right) - \left(t, \frac{t^2}{n} \right) \right\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{t^2}{m} - \frac{t^2}{n} \right)^2} = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| t^2.$$

Eftersom $t \in [-1, 1]$ gäller att $t^2 \leq 1$ så det följer att $\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| t^2 \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$. Triangelolikheten ger nu att

$$\|F_m(t) - F_n(t)\| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

om $m, n \geq N$. Alltså har vi att $\|F_m(t) - F_n(t)\| < \varepsilon$ för alla $t \in [-1, 1]$ om $m, n \geq N$. ▲

Anledningen till att vi införde begreppet "likformiga Cauchyföljder" var på grund av följande resultat.

Sats 5.1.5. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$, och låt (F_n) vara en likformig Cauchyföljd av funktioner $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ för alla $n \geq 1$. Då finns en unik funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ så att följderna (F_n) konvergerar likformigt mot F .

Anmärkning 5.1.6. Beviset av denna sats använder en egenskap hos de reella talen som går utanför detta kompendiums förmåga att visa – särskilt eftersom vi inte gett någon rigorös definition av de reella talen. Denna egenskap säger att $\mathbb{R}$ är *fullständigt*, vilket i princip betyder att det inte går att hitta en följd av reella tal som konvergerar mot någonting som ligger utanför $\mathbb{R}$. Vi utelämnar därför det rigorösa beviset av Sats 5.1.5 och förklarar enbart kortfattat hur beviset går till nedan.

Fixera ett $t \in X$ och betrakta följderna $F_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$ av talpar i $\mathbb{R}^2$. Denna följd kommer vara en så kallad Cauchyföljd i $\mathbb{R}^2$, och genom att använda egenskaperna hos $\mathbb{R}$ som vi nämnde ovan visar man att denna följd konvergerar mot en punkt som vi betecknar $(x(t), y(t))$. Gör vi detta för varje $t \in X$ kan vi därefter definiera funktionen F som $F(t) = (x(t), y(t))$ för $t \in X$. Att följderna (F_n) faktiskt konvergerar likformigt mot denna funktion F kan man slutligen visa är en direkt konsekvens av konstruktionen av F .

Exempel 5.1.7. Vi visade att följderna från Exempel 5.1.4 var en likformig Cauchyföljd. Enligt Sats 5.1.5 existerar därför en gränsfunktion F som följderna konvergerar mot. I Övning 5.3 visas att denna funktion är den horisontella linjen $F(t) = (t, 0)$ för alla $t \in [-1, 1]$. ▲

5.2 Konvergens och kontinuitet

Vi har hittills betraktat följder av godtyckliga funktioner $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$. I Kapitel 4 studerade vi speciellt kurvor, det vill säga sådana funktioner F som var *kontinuerliga*. En naturlig fråga att ställa sig är därför om en likformig Cauchyföljd av kurvor kommer konvergera likformigt mot en kurva? Med andra ord, kommer gränsfunktionen av en likformig Cauchyföljd av *kontinuerliga* funktioner vara kontinuerlig? Detta visar vi i följande sats.

Sats 5.2.1. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En likformig Cauchyföljd av kontinuerliga funktioner (F_n) , med $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ för alla $n \geq 1$, konvergerar likformigt mot en kontinuerlig funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Bevis. Från Sats 5.1.5 vet vi att följderna (F_n) konvergerar mot en funktion F . Det återstår att visa att F är kontinuerlig. Vi behöver alltså visa att det för varje givet tal $\varepsilon > 0$ och punkt $p \in X$ finns ett tal $\delta > 0$ så att alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$ uppfyller att $\|F(t) - F(p)\| < \varepsilon$.

Fixera därför ett $p \in X$ och tag ett $\varepsilon > 0$. För alla $n \geq 1$ kan vi skriva

$$F(t) - F(p) = F(t) - F_n(t) + F_n(t) - F_n(p) + F_n(p) - F(p).$$

Från triangelolikheten, se Övning 4.6, fås därmed att

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(p)\| &= \|F(t) - F_n(t) + F_n(t) - F_n(p) + F_n(p) - F(p)\| \leq \\ &\leq \|F(t) - F_n(t)\| + \|F_n(t) - F_n(p)\| + \|F_n(p) - F(p)\| \end{aligned}$$

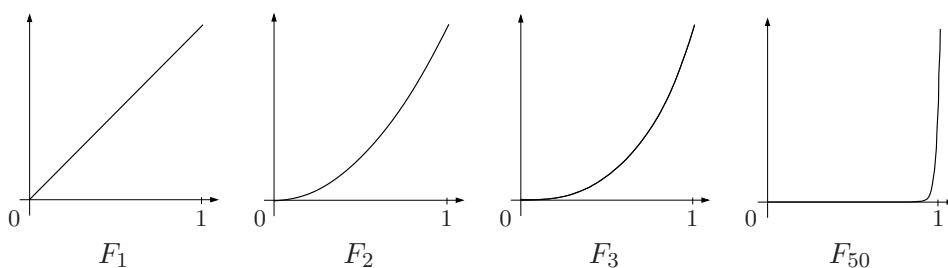
för alla $t \in X$. Eftersom följderna (F_n) konvergerar mot F så existerar ett $N \geq 1$ så att $\|F_n(t) - F(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ för alla $t \in X$ och alla $n \geq N$. Vi har också att funktionen F_n är kontinuerlig så det finns ett $\delta > 0$ så att $|t - p| < \delta$ implicerar att $\|F_n(t) - F_n(p)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alltså har vi att

$$\|F(t) - F(p)\| \leq \underbrace{\|F(t) - F_n(t)\|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\|F_n(t) - F_n(p)\|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\|F_n(p) - F(p)\|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$$

för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$. Därmed är F kontinuerlig i punkten p , och eftersom p var godtycklig är F kontinuerlig i alla punkter. $\square$

Exempel 5.2.2. I Övning 5.4 visas att följderna av kontinuerliga funktioner från Exempel 5.1.2 är en likformig Cauchyföljd, och vi ser även att funktionen F som följderna konvergerade mot är kontinuerlig. $\blacktriangle$

Exempel 5.2.3. Betrakta följderna (F_n) där $F_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ är funktionen definierad av $F_n(t) = (t, t^n)$ för $t \in [0, 1]$. Man kan visa att dessa funktioner är kontinuerliga för varje $n \geq 1$. Är denna följd en likformig Cauchyföljd? Vi ritar nedan upp bilderna av F_1, F_2, F_3 och F_{50} .



Denna följd av kurvor får brantare och brantare sluttning. Speciellt visade vi i Övning 2.6 att det för varje $c \in [0, 1]$ med $c < 1$ gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$. Samtidigt gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$. Om det skulle finnas någon gränsfunktion så skulle den därför behöva vara funktionen

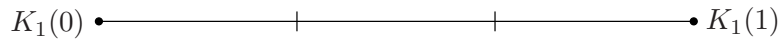
$$F(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{om } 0 \leq t < 1, \\ (1, 1) & \text{om } t = 1. \end{cases}$$

Detta är inte en kontinuerlig funktion. Följderna (F_n) kan därför *inte* vara en likformig Cauchyföljd eftersom det skulle motsäga Sats 5.2.1. $\blacktriangle$

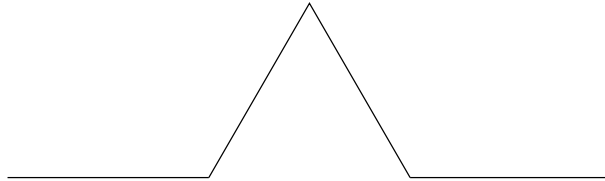
5.3 Kochkurvan

Helge von Koch var en svensk matematiker som levde 1870–1924. Han är i matematiska sammanhang mest känd för sitt exempel på en kontinuerlig kurva som inte har någon välbestämd lutning i någon punkt, som han beskrev i sin artikel *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* från 1904. Den kurvan blev sedermera uppkallad efter honom och kallas nu för *Kochkurvan*. Notera att von Kochs exempel kom ungefär 70 år innan Mandelbrot introducerade begreppet fraktal.

Vi kommer här studera Kochkurvan genom att konstruera den via följande iterativa process. Låt $K_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara det enklaste exemplet på en kurva med ändpunkter – ett linjesegment av längd 1.

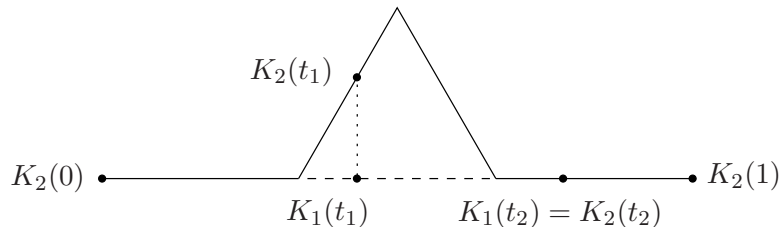


De två små vertikala strecken är enbart visuella hjälpmedel som delar in K_1 i tre lika långa delar. Gör nu följande modifiering av detta linjesegment: byt ut den mittersta tredjedelen mot de två andra sidorna i den liksidiga triangeln som har detta segment som bas som i figuren nedan.

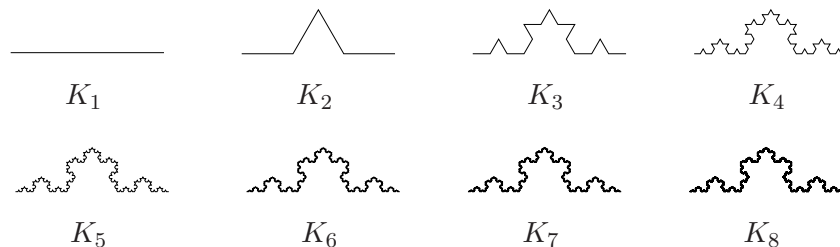


Detta ger oss en ny figur som består av fyra linjesegment av längd $\frac{1}{3}$.

Vi vill nu definiera en kurva $K_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ som har denna figur som bild. För alla $t \in [0, 1]$ där $K_1(t)$ inte ligger i den mittersta tredjedelen så låter vi $K_2(t) = K_1(t)$. Om $t \in [0, 1]$ är så att $K_1(t)$ ligger på mittersta tredjedelen så definierar vi $K_2(t)$ som den unika punkten i figuren ovan som ligger vinkelrätt rakt ovanför punkten $K_1(t)$.



Om vi tillämpar samma process på vardera av de fyra linjesegmenten i K_2 – där ”vinkelrätt” är med avseende på varje specifikt linjesegmentet – så får vi en ny kurva K_3 vars bild består av $4^2 = 16$ linjesegment av längd $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Genom att iterera denna process kommer vi få en följd av kurvor (K_n) där bilden av K_n består av 4^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{3^n}$. De första åtta kurvorna i denna sekvens ser vi här.



För varje $n = 1, 2, \dots$ ges alltså kurvan K_{n+1} av att applicera proceduren vi

förklarade ovan på varje maximalt linjesegment i kurvan K_n . Att alla dessa funktioner verkligen är kontinuerliga följer från förklaringen i Exempel 4.3.9.

Vi har nu skapat en följd av kurvor (K_n) . I bilden ovan ser K_6 , K_7 och K_8 ganska lika ut. Man kan därför gissa att denna följd konvergerar likformigt mot någon gränsfunktion K . Det ska vi visa nu, och för att göra detta räcker det, enligt Sats 5.1.5, att visa att följden (K_n) är en likformig Cauchyföljd.

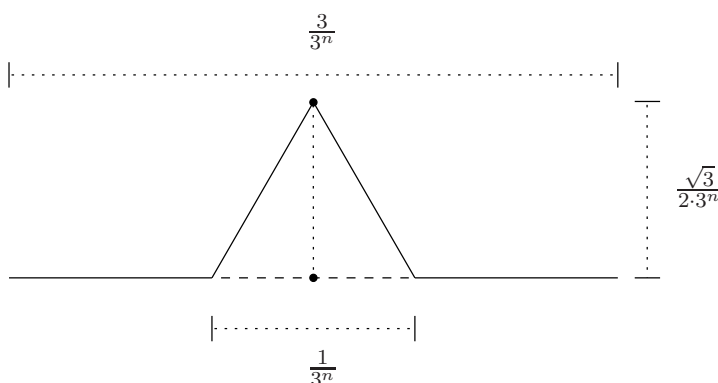
Hjälpsats 5.3.1. *För alla heltal $n \geq 1$ och alla tal $t \in [0, 1]$ gäller att*

$$\|K_{n+1}(t) - K_n(t)\| < \frac{1}{3^n}.$$

Bevis. Kurvan K_n består per konstruktion av 4^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{3}{3^n}$. Kurvan K_{n+1} är konstruerad genom att byta ut varje sådant linjesegment mot 4 stycken linjesegment av längd $\frac{1}{3^n}$. Det största avståndet mellan $K_n(t)$ och $K_{n+1}(t)$ ges därför av höjden på den liksidiga triangeln med sidlängd $\frac{1}{3^n}$ som vi ser i figuren nedan. Med Pythagoras sats beräknar vi höjden till

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 3^n}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n}$$

och vi sammanfattar allt detta i följande bild.



Eftersom $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 < 1$ får vi att $\|K_{n+1}(t) - K_n(t)\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$ för alla $t \in [0, 1]$. $\square$

Hjälpsats 5.3.2. *Låt m, n vara positiva heltal med $m > n$. Då gäller att*

$$\|K_m(t) - K_n(t)\| < \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} \right)$$

för alla $t \in [0, 1]$.

Bevis. Eftersom $m > n$ kan vi skriva

$$K_m(t) - K_n(t) = K_m(t) - K_{m-1}(t) + K_{m-1}(t) - K_{m-2}(t) + \dots + K_{n+1}(t) - K_n(t).$$

Med summasymbolen Σ kan vi skriva detta kortfattat som

$$K_m(t) - K_n(t) = \sum_{i=n}^{m-1} (K_{i+1}(t) - K_i(t)).$$

Därmed gäller att $\|K_m(t) - K_n(t)\| = \left\| \sum_{i=n}^{m-1} (K_{i+1}(t) - K_i(t)) \right\|$. Med hjälp av triangelolikheten och Hjälpssats 5.3.1 får vi att

$$\begin{aligned} \|K_m(t) - K_n(t)\| &= \left\| \sum_{i=n}^{m-1} (K_{i+1}(t) - K_i(t)) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \|K_{i+1}(t) - K_i(t)\| < \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{3^i}. \end{aligned}$$

Från Övning 2.10 gäller dessutom att

$$\sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{3^i} = \frac{(1/3)^n - (1/3)^{(m-1)+1}}{1 - 1/3} = \frac{(1/3)^n - (1/3)^m}{2/3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} \right).$$

Dessa två resultat ger alltså att

$$\|K_m(t) - K_n(t)\| < \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} \right). \quad \square$$

Sats 5.3.3. *Följden (K_n) är en likformig Cauchyföljd av kurvor. Speciellt finns det en kurva K som denna följd konvergerar likformigt mot.*

Bevis. Tag $\varepsilon > 0$. Välj N så stort att $3^N > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$. Då är $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^N} < \varepsilon$. Tag $m, n \geq N$. Om $m = n$ så är $\|K_m(t) - K_n(t)\| = 0 < \varepsilon$. Vi kan därför anta att $m > n$. Då gäller enligt Hjälpssats 5.3.2 att

$$\|K_m(t) - K_n(t)\| < \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} \right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

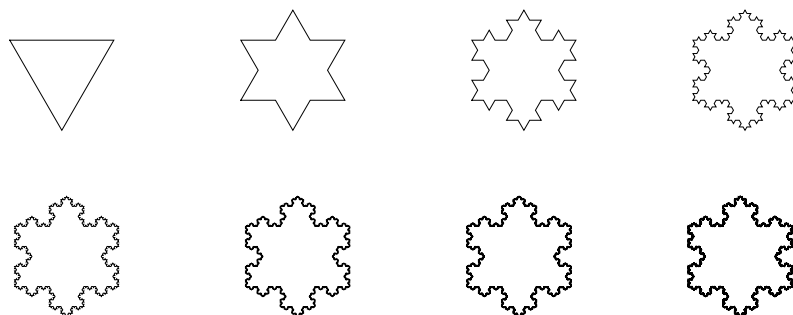
för alla $t \in [0, 1]$. Därmed är (K_n) en likformig Cauchyföljd av kurvor, och enligt Sats 5.2.1 konvergerar därför denna följd mot en kurva K . $\square$

Anmärkning 5.3.4. Vi har inte förmågan att skriva ner hur kurvan K ser ut, den består av oändligt många kantigheter, men satsen visar att det finns en unik kurva som vår följd konvergerar mot. Vi skulle även behöva titta väldigt noga för att se skillnad mellan denna gränsfunktion K och kurvan K_8 .

Definition 5.3.5. Kurvan K från Sats 5.3.3 kallas för *Kochkurvan*.

Anmärkning 5.3.6. Denna sidokommentar är för läsaren som sedan tidigare känner till derivatabegreppet. Anledningen till att Helge von Koch ursprungligen konstruerade Kochkurvan var för att ge ett exempel på en kontinuerlig funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ som inte är deriverbar någonstans, det vill säga en kontinuerlig funktion som inte har någon väldefinierad lutning i någon punkt.

Exempel 5.3.7. Om vi utför samma process som skapade följden som konvergerade mot Kochkurvan, men börjar med en liksidig triangel istället för ett enda linjesegment, får vi en annan följd av kurvor.

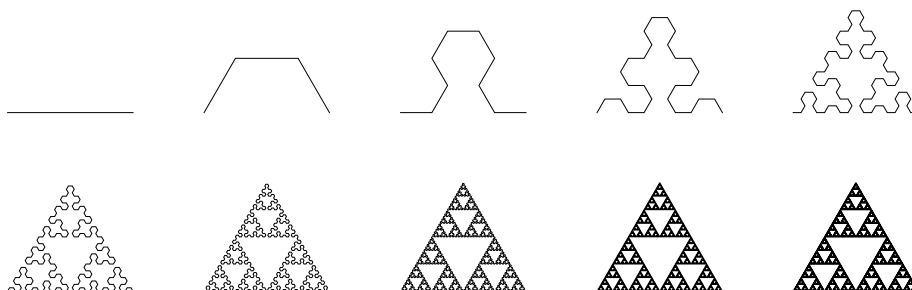


Här ovan visar vi de första åtta termerna i denna följd, och kurvan som denna följd konvergerar mot kallas *Kochsnöflingan*. ▲

5.4 Fler exempel på fraktala kurvor

Vi ger här två andra exempel på fraktala kurvor som konstrueras av följder av funktioner. Bevisen för att dessa följder konvergerar kan göras på ett analogt sätt till beviset för att Kochkurvan existerar.

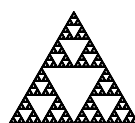
Exempel 5.4.1. Följden (P_n) nedan kallas för *Sierpinski's pilspetskurva* (eng. *the Sierpinski arrowhead curve*).



Den första termen i följden är ett linjesegment av längd 1, och i varje steg har vi bytt ut ett maximalt linjesegment av längd a mot tre andra linjesegment av längd $\frac{a}{2}$. För varje n gäller då att P_n består av 3^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{1}{2^{n-1}}$. Om vi jämför med följden från Exempel 2.2.12 ser vi att denna följd till en början konvergerar långsammare, men jämför vi figurerna nedan



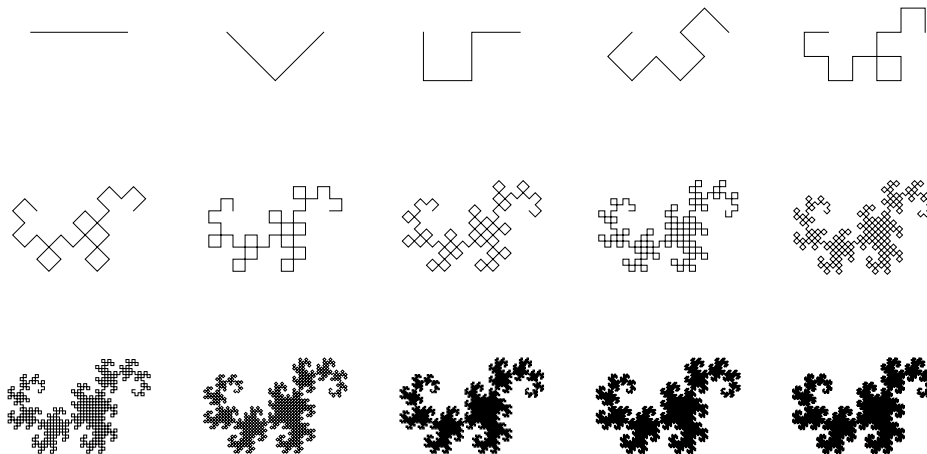
S_8 i Exempel 2.2.12



P_{10} ovan

kan vi notera att de ser väldigt lika ut, och följden ovan konvergerar faktiskt också mot Sierpinski-triangeln. ▲

Exempel 5.4.2. Följden (D_n) nedan konvergerar mot en kurva som är ett exempel på en så kallad *drackkurva* och brukar kallas för *Heighwaydraken*. Den är även känd under namnet *Jurassic Park-draken* efter att författaren lät den växa fram på kapitelsidorna i boken *Jurassic Park* från 1990.



Den första termen D_1 är ett linjesegment av längd 1 och i varje steg har vi bytt ut varje maximalt linjesegment av längd a mot två linjesegment av längd $\frac{a}{\sqrt{2}}$ som möts i en rät vinkel. För varje n gäller då att D_n består av 2^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$. Övning 5.10 går ut på att visa att denna följd faktiskt konvergerar. ▲

Övningar

Övning 5.1 (★). Rita upp bilderna av de första tre termerna i följen (F_n) där $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ är definierad av $F_n(t) = (t, nt)$.

Övning 5.2 (★). Visa att följen (F_n) , där $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ är definierad som $F_n(t) = (t, t + \frac{1}{n})$, konvergerar likformigt mot funktionen $F(t) = (t, t)$.

Övning 5.3 (★★). Visa att följen (F_n) från Exempel 5.1.4 konvergerar likformigt mot $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ där $F(t) = (t, 0)$ för alla $t \in [-1, 1]$. (Ledning: Observera att $t^2 \leq 1$ för alla $t \in [-1, 1]$.)

Övning 5.4 (★). Visa att följen från Exempel 5.1.2 är en likformig Cauchy-följd.

Övning 5.5 (★★★). Låt (F_n) vara en följd av funktioner där $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av $F_n(t) = (t, \frac{t^2}{n})$ för varje $n \geq 1$. Är (F_n) en likformig Cauchy-följd? Jämför resultatet med Exempel 5.1.4. Vad är skillnaden?

(Ledning för första frågan: För varje $N \geq 1$, välj $n = N$ och $m = N + 1$.)

Övning 5.6 (★★★). Är följen (F_n) från Övning 5.1 en likformig Cauchy-följd?

Övning 5.7 (★★★). Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$, och låt (F_n) vara en följd av funktioner $F_n: X \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vi kan för varje n skriva $F_n(t) = (f_n(t), g_n(t))$

där $f_n, g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$. Antag att följderna (F_n) konvergerar mot $F(t) = (f(t), g(t))$ där $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Visa att följderna (G_n) , med $G_n(t) = (g_n(t), f_n(t))$ för alla $t \in X$, konvergerar.

Övning 5.8 (★★). Låt (F_n) vara en följd av kurvor med $F_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ för varje n . Antag att (F_n) konvergerar likformigt mot en funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Fixera $n \geq 1$. För varje $m \geq n$ låter vi

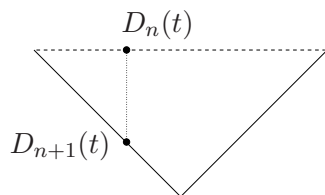
$$G_m(t) = F_n(t) + \sum_{i=n}^m (F_{i+1}(t) - F_i(t)).$$

Detta ger en följd (G_m) . Visa att $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = F$. Med andra ord, visa att

$$F(t) = F_n(t) + \sum_{i=n}^{\infty} (F_{i+1}(t) - F_i(t)).$$

(Ledning: Börja med att förenkla $G_m(t)$.)

Övning 5.9 (★). Låt (D_n) vara följderna från Exempel 5.4.2. Vi definierar följderna så att det för varje $n \geq 1$ och $t \in [0, 1]$ gäller, när vi tittar på ett maximalt linjesegment i D_n , att punkten $D_{n+1}(t)$ ligger vinkelrätt rakt under $D_n(t)$ som i bilden nedan.



Visa att $\|D_{n+1}(t) - D_n(t)\| \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} < \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ för alla $t \in [0, 1]$.

(Ledning: Jämför med beviset av Hjälpssats 5.3.1.)

Övning 5.10 (★★★). Visa att följderna (D_n) från Exempel 5.4.2 är en likformig Cauchyföljd.

(Ledning: Jämför med beviset av Sats 5.3.3, och använd Övning 5.9.)

6 Fraktal dimension

När man arbetar med fraktala strukturer visar det sig att vår intuitionen gällande geometri och dimension inte riktigt fungerar. Ett exempel på detta är Kochkurvan – vi visar i detta kapitel att den har en oändlig längd, trots att dess ändpunkter ligger på avstånd 1 från varandra. Ett annat exempel på att intuitionen inte fungerar är att det finns fraktala kurvor som täcker tvådimensionella ytor. Sådana kurvor kallas för plantäckande kurvor och vi kommer i detta kapitel konstruera *Hilbertkurvan* som är ett exempel på en sådan.

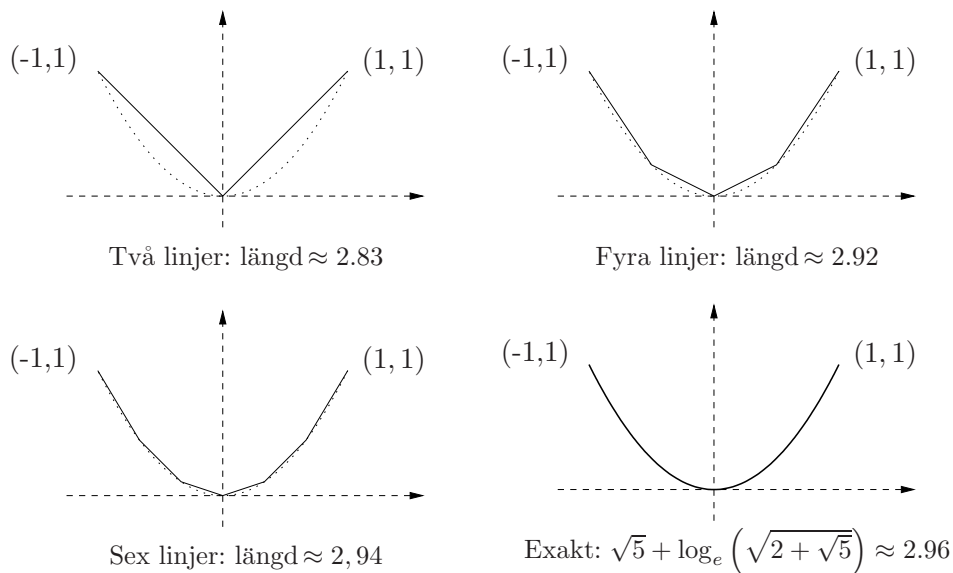
Dessa icke-intuitiva resultat kan till viss grad förklaras av begreppet *fraktal dimension*. Den fraktala dimensionen av en geometrisk figur är en annan typ av dimension än den som vi förklarade i slutet av Kapitel 4. Det visar sig att den fraktala dimensionen inte ens behöver vara ett heltal – det finns till exempel fraktala kurvor med fraktal dimension $\frac{3}{2}$.

I detta kapitel kommer vi förklara detta dimensionsbegrepp. Som illustrerande exempel visar vi även att Sveriges kust har en fraktal struktur.

6.1 Längden av en fraktal kurva

En metod för att beräkna längden, arean eller volymen av en geometrisk figur är att approximera figuren med en samling av enklare figurer och beräkna summan av dessas längder, areor eller volymer.

Exempel 6.1.1. Låt $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara kurvan definierad av $F(t) = (t, t^2)$. Vi kan approximera längden av denna kurva genom att approximera kurvan som en union av flera små linjesegment. Eftersom längden av ett linjesegment är enkelt att beräkna, det är bara avståndet mellan ändpunkterna, kan vi summera dessa längder för att få en approximation av kurvans längd.



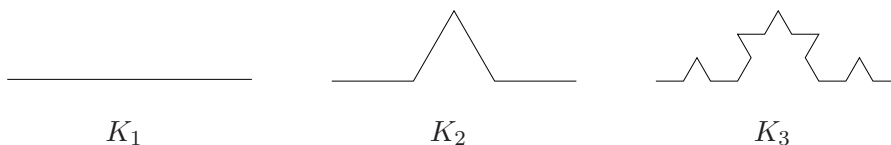
Vi ser här att ju mindre vi gör vår indelning, desto bättre approximation får vi.

Redan med sex linjer får vi en approximation av kurvans längd på 2.94 vilket är ungefär 0.02 ifrån det korrekta värdet som man med hjälp av integralkalkyl kan beräkna till $\int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \sqrt{5} + \log_e \left(\sqrt{2+\sqrt{5}} \right) \approx 2.96$. ▲

Om man vill beräkna längden av en fraktal kurva är det dock inte lika enkelt som i fallet ovan. Kurvan $F(t) = (t, t^2)$ har egenskapen att varje liten bit går att approximera med ett linjesegment när man förstorar kurvan tillräckligt mycket. Tittar man väldigt nära på en liten del av kurvan så ser den nästan rak ut. En kurva med denna egenskap kallas *slät*. Man kan tänka att man slätar ut kurvan genom att dela upp den i väldigt små delar och studera dessa delar en i taget. En fraktal, däremot, har en självupprepande struktur och kan vara "oändligt" kantig – oavsett hur nära man tittar så ser den likadan ut.

Exempel 6.1.2. Låt oss beräkna längden av Kochkurvan från Kapitel 5. Eftersom den ges av gränsfunktionen av följen (K_n) beräknar vi först längderna av K_n för $n \geq 1$. Låt l_n vara längden av K_n . För varje n så är K_{n+1} en bättre approximation av K än K_n , och följen (l_n) konvergerar mot längden av K .

Kurvan K_1 består av ett enda linjesegment som har längd 1, så $l_1 = 1$. Längden av K_2 är $l_2 = \frac{4}{3}$ eftersom den består av fyra linjesegment som alla har längd $\frac{1}{3}$. Kurvan K_3 består av $4^2 = 16$ linjesegment av längd $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, så $l_3 = \frac{4^2}{3^2}$.



På samma sätt har vi att K_n har längd $l_n = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. En "dålig" approximation av längden av Kochkurvan ges då av $l_{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^9 \approx 13.32$. En lite bättre approximation ges av $l_{100} = \left(\frac{4}{3}\right)^{99} \approx 2 \cdot 10^{12}$. Notera att l_{100} är mycket större än l_{10} . Eftersom $\frac{4}{3} > 1$ så kommer nämligen följen

$$1, \left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \dots$$

växa obegränsat. Det betyder att Kochkurvan är oändligt lång, trots att det är en kurva med en start och en slutpunkt.

Anledningen till att följen (l_n) går mot oändligheten är för att nämnaren 3 är för liten i jämförelse med täljaren 4. Vi väljer nu att istället titta på motsvarande följd där vi förstorat nämnaren genom att byta ut 3 mot 3^d för något $d \in \mathbb{R}$. Låter vi $d = 2$ så är $\frac{4}{3^2} = \frac{4}{9} < 1$ och följen

$$1, \left(\frac{4}{9}\right)^1, \left(\frac{4}{9}\right)^2, \dots$$

går mot 0 enligt Övning 2.6. Om vi istället väljer det d som uppfyller att $3^d = 4$ så kommer $\frac{4}{3^d} = \frac{4}{4} = 1$ och följen $1, 1^1, 1^2, \dots$ konvergerar mot det positiva talet 1. Är man bekant med logaritmer ser man att lösningen till $3^d = 4$ ges av $d = \log_3(4)$. Med hjälp av räknelagar för logaritmer får vi att $d = \log_3(4) = \frac{\log_{10}(4)}{\log_{10}(3)} \approx 1.26$. ▲

Utifrån resultatet i föregående exempel gör vi nu följande definition.

Definition 6.1.3. Låt (F_n) vara en följd av kurvor med ändpunkter som konvergerar likformigt, där F_n är en union av k_n stycken linjesegment av längd r_n för varje $n \geq 1$. Antag att $r_n \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$. Den *fraktala dimensionen* av $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ är det minsta icke-negativa tal d så att följden (x_n) definierad av $x_n = k_n \cdot r_n^d$ konvergerar när $n \rightarrow \infty$.

Exempel 6.1.4. I Exempel 6.1.2 studerade vi följden (K_n) där $r_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ och $k_n = 4^{n-1}$. Kochkurvan har alltså fraktal dimension $\log_3(4) \approx 1.26$. Vi kan förklara det med att kurvan har "för mycket" struktur för att vara endimensionell, men inte tillräckligt mycket för att vara tvådimensionell. ▲

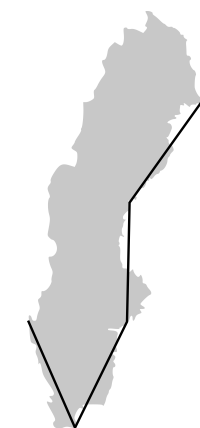
Anmärkning 6.1.5. Denna definition för den fraktala dimensionen av en kurva F beror på valet av följden (F_n) . För de exempel som vi ger i detta kompendium är dock detta inget som vi behöver bekymra oss om.

6.2 Sveriges kust

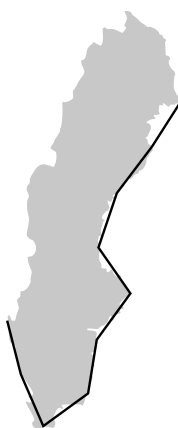
Låt oss nu betrakta Sveriges kust, och speciellt dess längd. Detta gör vi för att ge ett exempel som visar att fraktala dimensioner även förekommer i "verkligheten".

Sveriges fastlandskust går från väst vid gränsen till Norge, ner till Öresund, upp förbi Stockholm och sedan upp ända upp till Västerbotten där gränsen till Finland tar vid. Hur lång är denna sträcka? På samma sätt som med Kochkurvan beror det på hur noggrant man tittar.

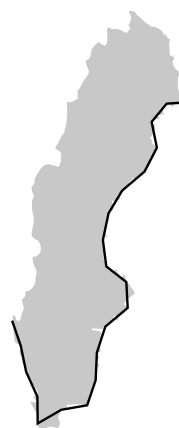
Nedan räknar vi ut uppskattningar för Sveriges kust. Först använder vi en mätsticka på ungefär 400 km, och då fyra sådana behövs för att gå längs kusten så får vi en total längd på 1600 km. Använder vi istället en mätsticka på 200 km får vi plats med nio stycken stickor, vilket ger en total längd på 1800 km. På samma sätt räknar vi ut en approximation med en mätsticka på 100 km respektive 50 km.



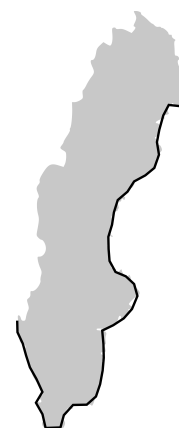
linjal ≈ 400 km
längd ≈ 1600 km



linjal ≈ 200 km
längd ≈ 1800 km



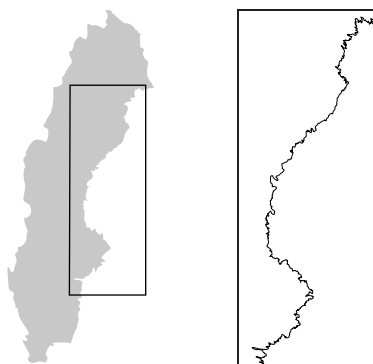
linjal ≈ 100 km
längd ≈ 2000 km



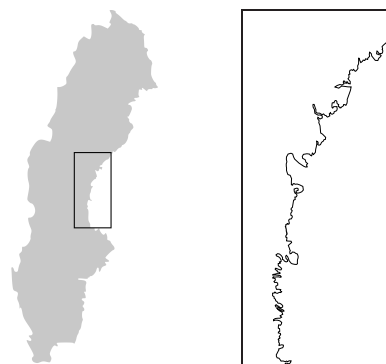
linjal ≈ 50 km
längd ≈ 2250 km

Precis som i Exempel 6.1.1 och Exempel 6.1.2 ser vi att ju kortare mätsticka vi använder desto större blir vår uppskattning av kusten. Skillnaden mellan följderna i Exempel 6.1.1 och Exempel 6.1.2 är att den förstnämnda konvergerar medan den andra växer obegränsat. Frågan är hur det är i fallet med Sveriges kust – konvergerar längden när mätstickans längd går mot 0?

I bilden ovan ser det kanske ut som att mätningen längst till höger borde ge en bra uppskattning av kustens längd. På samma sätt som med Kochkurvan behöver vi dock ta hänsyn till fler och fler detaljer ju kortare mätsticka vi använder, vilket i sin tur kommer kräva att vi använder ännu kortare mätstickor. Nedan ger vi två förstoringar av kusten, den ena mer detaljerad än den andra.

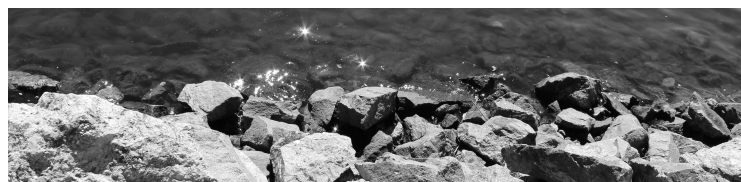


Figur 6.1: En förstoring av en remsa av Sveriges kust.



Figur 6.2: En mer detaljerad förstoring av en mindre del av kusten.

Det man ska ta med sig från dessa bilder är att vi ser fler och fler detaljer som behöver mätas ju högre upplösning vi använder. Det är precis som med fraktaler, deras strukturer upprepar sig när man tittar noggrannare. Om man är en riktigt hängiven kustlängdsmätare så bestämmer man sig kanske till slut för att gå längs med kusten och mäta den meter för meter. Även här stöter man på problem eftersom en godtycklig kustbit ser ut som på bilden nedan.



Notera att även denna lilla kustremsa är väldigt kantig av sig. Tittar man ännu noggrannare behöver man mäta runt alla grus- och sandkorn. Varenda litet sandkorn är i sig själv också kantigt, och så fortsätter det. Ju noggrannare man tittar, desto fler detaljer ser man. Man inser till slut att Sveriges kust, precis som Kochkurvan, är oändligt lång. Kusten har nämligen en fraktal dimension d som man kan uppskatta till $d \approx 1.1$. Det är något som en ordentlig kustlängdsmätare får ta i beaktande.

Anmärkning 6.2.1. Vi vill poängtera att de bilder på Sveriges kust och de värden av dess längd som vi presenterar är approximationer och kan skilja sig

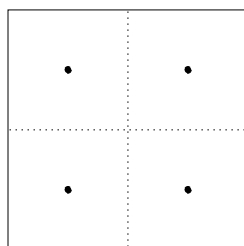
från verkligheten. De ska ses som hjälpmedel för våra förklaringar, inte som detaljstudier över exakta värden av Sveriges kustlängd. Notera också att man i verkligheten enbart kommer se atommoln när vi tittar allt för noga och då blir begrepp som längdmått meningslösa. Vi bortser från detta i förklaringen ovan.

Att längden blir oändligt lång gäller även för vissa landgränser, och det här upptäcktes första gången av Lewis Fry Richardson som noterade att längden av gränsen mellan Portugal och Spanien varierade mycket beroende på vem man frågade. Han insåg att detta berodde på noggrannheten i deras mätningar. År 1967 publicerade Mandelbrot en artikel med namnet "*How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*" där han förklarade detta fenomen matematiskt med hjälp av den fraktala dimensionen. Notera att Mandelbrot kallade det "fractional dimension" och inte "fractal dimension". Anledningen till detta var att han vid denna tidpunkt inte kommit på ordet "fraktal" – det var först år 1975 som han myntade begreppet.

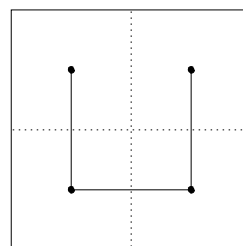
6.3 Plantäckande kurvor

Nu när vi sett att kurvor kan ha fraktala dimensioner som är större än 1 kan man fråga sig om det kan finnas ett exempel på en kurva som har fraktal dimension 2. Sådana kurvor existerar faktiskt! Vi kallar en kurva med fraktal dimension 2 för *plantäckande* då de täcker ett tvådimensionellt område. Den första kurvan med fraktal dimension 2 upptäcktes av Giuseppe Peano år 1890, och plantäckande kurvor brukar ofta kallas för Peanokurvor efter honom. Den kurva vi kommer betrakta här beskrevs först av David Hilbert år 1891, bara ett år efter Peanos exempel, och den kallas därför för Hilbertkurvan.

Hilbertkurvan är en kurva med ändpunkter $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ som fullständigt täcker en kvadrat med sidlängd 1 i $\mathbb{R}^2$. På samma sätt som med Kochkurvan kommer vi definiera denna kurva som en gräns av en följd av kurvor. För att definiera den första kurvan i denna följd så delar vi in kvadraten i fyra mindre kvadrater med sidlängd $\frac{1}{2}$ och markerar mittpunkterna på dessa. Dra sedan linjesegment mellan dessa punkter som i figuren nedan. Denna kurva kallar vi för H_1 .



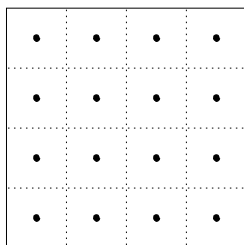
Fyra mittpunkter.



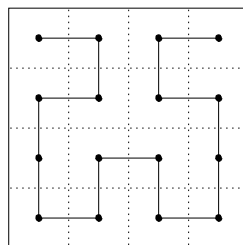
Kurvan H_1 .

I nästa steg så delar vi in vardera av våra fyra mindre kvadrater i fyra ännu mindre kvadrater med sidlängd $\frac{1}{4}$ och markerar dessas mittpunkter. Vi har då

16 punkter, en för varje kvadrat, och vi vill ha en kurva som går igenom alla dessa punkter genom att besöka varje kvadrat precis en gång. Det gör vi på följande sätt.

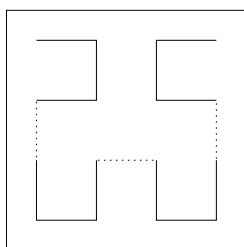


16 mittpunkter.

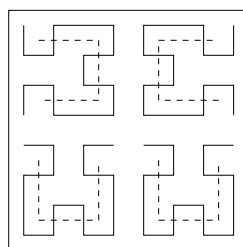


Kurvan H_2 .

För nästa steg så ser vi i figuren nedan till vänster att H_2 i princip består utav fyra kopior av H_1 . För att konstruera H_3 väljer vi därför att byta ut de fyra kopiorna av H_1 mot fyra kopior av H_2 .

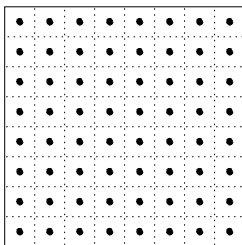


Fyra kopior av H_1 .

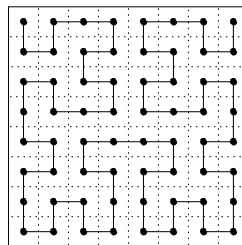


Fyra kopior av H_2 .

Slutligen så lägger vi till linjesegment som sammanlänkar de fyra kopiorna av H_2 , precis som de linjesegment som sammanlänkade de fyra kopiorna av H_1 . Detta kommer skapa en kurva H_3 som per konstruktion kommer gå igenom alla 64 mittpunkter i de 64 kvadraterna med sidlängd $\frac{1}{8}$.

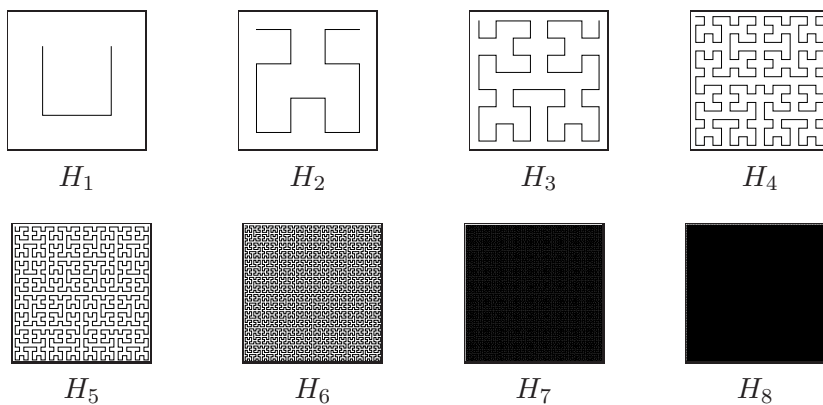


64 mittpunkter.



Kurvan H_3 .

Vi har nu visat hur man konstruerar kurvorna H_1, H_2 och H_3 . Genom att iterera denna procedur får vi en följd av kurvor (H_n). Nedan visar vi de åtta första kurvorna i denna följd.



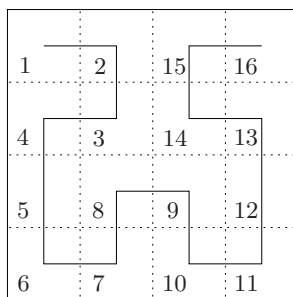
Anmärkning 6.3.1. Beroende på vilken upplösning, alternativt kvalitet på trycket, som man har så kan det se ut som att H_8 enbart ges av en svart ruta, men det är inte sant. Om man förstörar bilden så ser man att det är stora ”hål” i figuren. Vi kan inte skapa en plantäckande kurva efter enbart ett ändligt antal iterationer med denna procedur, men vi kommer visa att denna följd konvergerar mot en kurva som täcker hela kvadraten.

Per konstruktion kommer kurvan $H_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gå igenom vardera av de 4^n kvadraterna med sidlängd $\frac{1}{2^n}$ precis en gång. Låt oss numrera dessa kvadrater i den ordning som kurvan H_n passerar genom dem – med början i det övre vänstra hörnet. Enligt Sats 4.3.8 kan vi då dela in intervallet $[0, 1]$ i de 4^n delintervallen

$$\left[0, \frac{1}{4^n}\right], \left[\frac{1}{4^n}, \frac{2}{4^n}\right], \dots, \left[\frac{4^n - 1}{4^n}, 1\right],$$

så att $H_n(t)$ ligger i den i :te kvadraten precis då $t \in \left[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}\right]$. Låt oss förklara detta med ett exempel.

Exempel 6.3.2. Betrakta kurvan H_2 . Vi numrerar de $4^2 = 16$ kvadraterna med sidlängd $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ som i figuren nedan.



Kurvan H_2 .

Till exempel gäller att $H_2(t)$ ligger i kvadrat 3 precis då $t \in \left[\frac{2}{16}, \frac{3}{16}\right]$. ▲

Vi vill nu visa att följden (H_n) konvergerar mot en kurva $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Detta görs på ett liknande sätt till hur vi visade att följden (K_n) från Kapitel 5 konvergerade mot Kochkurvan.

Hjälpsats 6.3.3. För alla heltal $n \geq 1$ och alla tal $t \in [0, 1]$ gäller att

$$\|H_{n+1}(t) - H_n(t)\| < \frac{2}{2^n}.$$

Bevis. Enligt konstruktionen av följden (H_n) har vi att $H_{n+1}(t)$ och $H_n(t)$ ligger i samma kvadrat med sidlängd $\frac{1}{2^n}$ för varje t . Det största avståndet mellan två punkter i en kvadrat med sidlängd $\frac{1}{2^n}$ är längden av kvadratens diagonal som är $\sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n}$. Vi har därför att

$$\|H_{n+1}(t) - H_n(t)\| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n}. \quad \square$$

Hjälpsats 6.3.4. Låt m, n vara positiva heltal med $m > n$. Då gäller att

$$\|H_m(t) - H_n(t)\| < 4 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right)$$

för alla $t \in [0, 1]$.

Bevis. På samma sätt som i beviset av Hjälpsats 5.3.2 kan vi skriva

$$H_m(t) - H_n(t) = \sum_{i=n}^{m-1} (H_{i+1}(t) - H_i(t)).$$

Från triangelolikheten och Hjälpsats 6.3.3 får vi nu att

$$\|H_m(t) - H_n(t)\| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \|H_{i+1}(t) - H_i(t)\| < \sum_{i=n}^{m-1} \frac{2}{2^i} = 2 \cdot \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^i}.$$

Formeln från Övning 2.10 ger nu att

$$\|H_m(t) - H_n(t)\| < 2 \cdot \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^i} = 2 \cdot \left(\frac{1/2^n - 1/2^m}{1 - 1/2} \right) = 4 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right). \quad \square$$

Sats 6.3.5. Följden (H_n) är en likformig Cauchyföljd. Speciellt konvergerar denna följd likformigt mot en kurva $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Bevis. Tag $\varepsilon > 0$. Välj N så stort att $2^N > \frac{4}{\varepsilon}$. Då har vi att $4 \cdot \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Tag $m, n \geq N$. Om $m = n$ så är $\|H_m(t) - H_n(t)\| = 0 < \varepsilon$. Vi kan därför anta att $m > n$. Då följer från Hjälpsats 6.3.4 att

$$\|H_m(t) - H_n(t)\| < 4 \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right) < 4 \cdot \frac{1}{2^n} \leq 4 \cdot \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

för alla $t \in [0, 1]$. Därmed har vi visat att följden (H_n) är en likformig Cauchyföljd. Enligt Sats 5.2.1 konvergerar därför denna följd mot en kurva $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. $\square$

Definition 6.3.6. Kurvan H från Sats 6.3.5 kallas för *Hilbertkurvan*.

Än så länge har vi inte visat att kurvan H verkligen täcker hela kvadraten, även om bilderna ovan ger oss hopp om att det kan vara sant. Detta visar vi nu.

Sats 6.3.7. *Hilbertkurvan H går igenom varenda punkt i kvadraten.*

Bevis. Tag en punkt (x, y) i kvadraten. Vi vill då visa att det finns ett tal $t \in [0, 1]$ så att $H(t) = (x, y)$. Fixera ett heltal $n \geq 1$. Då gäller att (x, y) ligger i någon av de 4^n kvadraterna med sidlängd $\frac{1}{2^n}$. Per konstruktion kommer kurvan H_n gå igenom mittpunkterna av alla de 4^n kvadraterna. Speciellt finns det ett $t_n \in [0, 1]$ så att $H_n(t_n)$ är lika med mittpunkten i den kvadrat som (x, y) ligger i. Med samma argument som i beviset av Hjälpssats 6.3.3 får vi att

$$\|H_n(t_n) - (x, y)\| < \frac{2}{2^n}.$$

Låt I_n beteckna det delintervall $[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}] \subseteq [0, 1]$ som innehåller t_n . Vi vill nu relatera denna information till Hilbertkurvan H . Ett till synes komplicerat sätt att skriva $H(t_n)$ på är som $H(t_n) = H_n(t_n) + \sum_{i=n}^{\infty} (H_{i+1}(t_n) - H_i(t_n))$, se Övning 5.8. Detta kommer dock visa sig vara användbart, och från triangulolikheten får vi nu att

$$\begin{aligned} \|H(t_n) - (x, y)\| &= \left\| \left(H_n(t_n) + \sum_{i=n}^{\infty} (H_{i+1}(t_n) - H_i(t_n)) \right) - (x, y) \right\| \leq \\ &\leq \|H_n(t_n) - (x, y)\| + \left\| \sum_{i=n}^{\infty} (H_{i+1}(t_n) - H_i(t_n)) \right\|. \end{aligned}$$

Övning 6.10 visar att triangulolikheten, under vissa förutsättningar, även gäller för "oändliga summor" av tal. Samma bevis kan man även använda för att visa att triangulolikheten gäller, under vissa förutsättningar, för "oändliga summor" av punkter i $\mathbb{R}^2$. Använder vi detta, tillsammans med Hjälpssats 6.3.3, får vi att

$$\begin{aligned} \|H(t_n) - (x, y)\| &\leq \|H_n(t_n) - (x, y)\| + \left\| \sum_{i=n}^{\infty} H_{i+1}(t_n) - H_i(t_n) \right\| \leq \\ &\leq \|H_n(t_n) - (x, y)\| + \sum_{i=n}^{\infty} \|H_{i+1}(t_n) - H_i(t_n)\| < \\ &< \frac{2}{2^n} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{2}{2^i} = \frac{2}{2^n} + 2 \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

Från Övning 2.10 har vi att

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} = \frac{2}{2^n}.$$

Alltså gäller det att

$$\|H(t_n) - (x, y)\| < \frac{1}{2^n} + 2 \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^n} + 2 \cdot \frac{2}{2^n} = \frac{6}{2^n}.$$

För varje $n \geq 1$ får vi alltså ett $t_n \in [0, 1]$ så att $\|H(t_n) - (x, y)\| < \frac{6}{2^n}$. Eftersom $\frac{6}{2^n} \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$ har vi visat att det finns en följd (t_n) så att $\|H(t_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Med andra ord har vi hittat en följd (t_n) så att $H(t_n) \rightarrow (x, y)$ då $n \rightarrow \infty$.

Konstruktionen ovan ger även en följd av intervall $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ vars längd går mot 0 och där $t_n \in I_n$ för varje n . Eftersom längden av intervallen går mot 0 så kan man visa att följden (t_n) konvergerar då $n \rightarrow \infty$, se Anmärkning 5.1.6. Låt $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$. Då H är kontinuerlig följer det nu från Sats 4.3.5 att

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(t_n) = H\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = H(t).$$

Det finns alltså ett tal $t \in [0, 1]$ så att $H(t) = (x, y)$. Eftersom (x, y) var en godtycklig punkt i kvadraten följer det nu att H måste gå igenom varenda punkt och därmed täcka hela kvadraten. $\square$

Resultatet av denna sats är häpnadsväckande eftersom det visar att något tvådimensionellt kan täckas av något endimensionellt. Detta går i strid med den intuitiva bilden av dimension som vi gav i slutet av Kapitel 4 och visar att dimensionsbegreppet är svårt att arbeta med. Teorin som behövs för att förklara dimensioner mer ordentligt är både intressant och spännande, men vi har tyvärr inte möjlighet att gå igenom denna teori här.

Anmärkning 6.3.8. Plantäckande kurvor existerar inte enbart för att skapa huvudbry hos matematiker utan har även tillämpningar i industrin. Kurvor i följden (H_n) har använts för att konstruera antenner i mobiltelefoner. Eftersom mobiler är så små har man en väldigt liten yta att få plats med en antenn, och därför är nästintill plantäckande kurvor väldigt användbara då de använder så mycket av utrymmet som möjligt och kan därför ge effektiva antenner.

Övningar

Övning 6.1 (★★). Visa att Hilbertkurvan $H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$ har fraktal dimension 2.

Övning 6.2 (★★). Beräkna den fraktala dimensionen av Sierpinskiatriangeln genom att använda följden av kurvor från Exempel 5.4.1.
(Ledning: Om $2^d = 3$ så är $d = \log_2(3) \approx 1.58$).

Övning 6.3 (★★). Beräkna den fraktala dimensionen av Kochsnöflingan från Exempel 5.3.7.

Övning 6.4 (★★). Beräkna den fraktala dimensionen av Jurassic Park-kurvan från Exempel 5.4.2.

Övning 6.5 (★ ★ ★). Låt $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett linjesegment av längd 1.

- (i) Hitta en följd (F_n) som konvergerar mot F där F_n är en union av n stycken linjesegment av längd $\frac{1}{n}$.

- (ii) Visa med denna följd att F har fraktal dimension 1.

Övning 6.6 (***). Låt $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad av $F(t) = (0, 0)$ för alla $t \in [0, 1]$. Välj en följd (F_n) som konvergerar mot F där F_n är ett enda linjesegment av längd $\frac{1}{n}$ för $n \geq 1$. Vad är den fraktala dimensionen?

Övning 6.7 (*). Rita upp H_3 och numrera kvadraterna med sidlängd $\frac{1}{8}$ på samma sätt som i Exempel 6.3.2. För vilka $t \in [0, 1]$ gäller att $H_3(t)$ ligger i kvadrat 18?

Övning 6.8 (*). Kopiera av bilden från Exempel 6.3.2 och rita in kurvan H_3 i den. Markera i bilden den 18:de kvadraten med sidlängd $\frac{1}{8}$ från Övning 6.7. Förklara nu med hjälp av bilden varför $\|H_3(t) - H_2(t)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ för $t = \frac{17}{64}$. (Ledning: $t \in [\frac{17}{64}, \frac{18}{64}] \subseteq [\frac{4}{16}, \frac{5}{16}]$.)

Övning 6.9 (**). Denna och nästa övning kan lösas med teorin från Kapitel 2. Anledningen till att de är med här är för att förklara ett steg i beviset av Sats 6.3.7.

- (i) Visa den omvända triangelolikheten

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}$. (Ledning: Använd triangelolikheten på $|x - y + y|$.)

- (ii) Låt (x_n) vara en talföljd som konvergerar mot $a \in \mathbb{R}$. Visa att $|x_n| \rightarrow |a|$ när $n \rightarrow \infty$.

Övning 6.10 (***). Denna övning går ut på att visa att triangelolikheten även går att tillämpa på "oändliga summor".

- (i) Låt (x_n) och (y_n) vara två talföljder som konvergerar mot a respektive b och antag att $x_n \leq y_n$ för alla $n \geq 1$. Visa att $a \leq b$. (Ledning: Visa att $a - \varepsilon < b + \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$ och hitta en motsägelse om $a > b$.)
- (ii) Låt (a_n) vara en talföljd. För varje heltal $n \geq 1$ skriver vi $p_n = \sum_{i=1}^n a_i$ och $q_n = \sum_{i=1}^n |a_i|$. Antag att följderna (p_n) och (q_n) konvergerar och skriv

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \sum_{i=1}^{\infty} |a_n|.$$

Visa att

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

(Ledning: Använd Övning 6.9.)

7 Mandelbrotmängden

Ett både intressant och spännande matematiskt problem är att studera så kallade dynamiska system. Som exempel kan nämnas väderprognoser där man försöker förstå hur vädret kommer förändras med tiden, eller något så ”enkelt” som att förstå hur en biljardboll rör sig över ett biljardbord utan friktion.

Det var just för att studera dynamiska system som Benoit Mandelbrot i slutet av 1970-talet börja undersöka egenskaperna hos en viss mängd som senare fick hans namn – *Mandelbrotmängden*. Vi kommer i detta kapitel definiera denna mängd och visa några egenskaper hos den. Därefter kommer vi även definiera så kallade *Juliamängder* och förklara hur de hänger ihop med Mandelbrotmängden.

Eftersom Mandelbrotmängden är definierad som en delmängd av det *komplexa talplanet* börjar vi med en kort introduktion till *komplexa tal*.

7.1 Komplexa tal

Det *imaginära talet* i är ett tal med egenskapen att $i^2 = -1$. Med andra ord gäller att

$$i = \sqrt{-1}.$$

Vidare skriver man ett godtyckligt *komplext tal* som ett tal på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Denna konstruktion kan måhända kännas märklig, vilket även de som först studerade dessa tal tyckte – därav adjektivet *imaginärt* som i icke-existerande. Vi kommer här istället ge en annan definitionen av talet i och de komplexa talen. Denna definition kan till en början synas artificiell, men den har fördelen att det inte går att ifrågasätta om talet i verkligen finns – givet att man tror på att de reella talen existerar. Om man sedan tidigare sett definitionen vi förklarade ovan så ombeds läsaren att försäkra sig om att dessa två definitioner i slutändan ger samma sak.

Vi har under hela kompendiet betraktat talplanet $\mathbb{R}^2$ som består av ordnade talpar (x, y) med $x, y \in \mathbb{R}$. I Kapitel 4 definierade vi även en addition mellan punkter i $\mathbb{R}^2$. Än så länge har vi dock inte definierat någon multiplikation mellan punkter.

Definition 7.1.1. De *komplexa talen* är mängden

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

tillsammans med operationerna:

- addition: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,
- multiplikation: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$,

för alla $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Vi betecknar mängden av de komplexa talen med $\mathbb{C}$.

Denna definitionen säger alltså att de komplexa talen $\mathbb{C}$ består av de ordnade talparen i $\mathbb{R}^2$, tillsammans med de två operationerna addition och multiplikation. Notera att varje punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ kan skrivas $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$.

Vi kan se $\mathbb{R}$ som en delmängd av $\mathbb{C}$ genom att identifiera ett tal $a \in \mathbb{R}$ med punkten $(a, 0)$. Det gäller även att $(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$ och $(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, 0)$, så additionen och multiplikationen i $\mathbb{C}$ är kompatibel med multiplikationen i $\mathbb{R}$. För att slippa skriva ut parenteser överallt så inför vi följande notation.

Notation 7.1.2. För alla $a, b \in \mathbb{R}$ skriver vi $(a, 0) = a$ och $(0, b) = bi$. Ett komplext tal (a, b) skrivs därmed

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Vi kommer oftast använda z eller c för ett godtyckligt komplext tal $a + bi$.

Fördelen med denna definition är att det imaginära talet i är någonting så enkelt som en punkt i ett koordinatsystem, nämligen punkten $(0, 1)$. Detta är varken mer abstrakt eller onaturligt än vanliga reella tal – protester mot att vi bara ”hittat på” talet i är således inte längre aktuella.

Sats 7.1.3. Talet i uppfyller att $i^2 = -1$.

Bevis. Enligt definitionen av multiplikation har vi att

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1. \quad \square$$

Anmärkning 7.1.4. I allmänhet har vi att multiplikationen från Definition 7.1.1 fungerar som vanlig produkt av parenteser, såsom

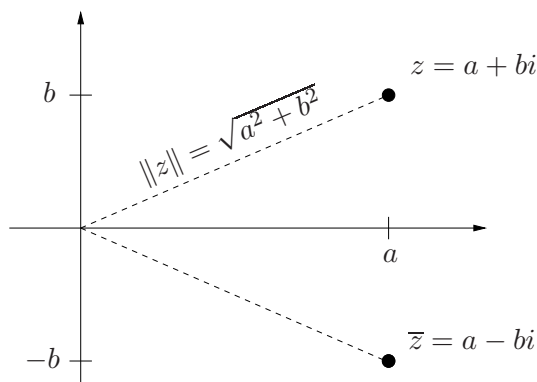
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i.$$

Eftersom ett komplext tal z per definition motsvarar en punkt (a, b) i talplanet $\mathbb{R}^2$ kan vi även använda koncept från geometrin för att studera komplexa tal.

Definition 7.1.5. Låt $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Absolutbeloppet* av z är normen av punkten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, och vi skriver

$$\|z\| = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definition 7.1.6. Låt $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Det *komplexa konjugatet* av z är det komplexa talet $\bar{z} = a - bi$.



Figur 7.1: Den geometriska tolkningen av absolutbeloppet av $z = a + bi$ är som avståndet från punkten (a, b) till origo. Den geometriska tolkningen av det komplexa konjugatet av z är som speglingen av punkten (a, b) i x -axeln.

7.2 Mandelbrotmängden

I Kapitel 2 definierade vi en talföljd av reella tal som en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. På samma sätt är en *komplex talföljd* en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$. Med andra ord är en komplex talföljd en följd $z_1, z_2, \dots$ där $z_n = f(n)$ är ett komplext tal för varje $n \in \mathbb{Z}_+$.

Definition 7.2.1. Låt (z_n) vara en komplex talföljd. Vi säger att (z_n) är en *begränsad* följd om det finns något $D \in \mathbb{R}$ så att $\|z_n\| \leq D$ för alla $n \geq 1$.

Vi är nu redo att definiera Mandelbrotmängden.

Definition 7.2.2. För varje $c \in \mathbb{C}$ bildar vi den komplexa talföljden (c_n) genom att låta $c_1 = c$ och $c_{n+1} = c_n^2 + c$ för alla $n \geq 1$. Mängden

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid (c_n) \text{ är en begränsad följd}\}$$

kallas för *Mandelbrotmängden*.

Enligt definitionen är Mandelbrotmängden den delmängd av $\mathbb{C}$ som består av de komplexa tal c så att följden

$$c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots$$

är begränsad. För att förstå denna definition börjar vi med några exempel.

Exempel 7.2.3. Låt $c = 0$. Då är

$$c_1 = 0, c_2 = 0^2 + 0 = 0, c_3 = 0^2 + 0 = 0, \dots$$

Vi ser att $c_n = 0$ för alla n så följden (c_n) är begränsad – vi kan till exempel välja $D = 1$ i Definition 7.2.1. Därmed gäller att $0 \in M$. ▲

Exempel 7.2.4. Talet $c = 2 \notin M$. Det går att se eftersom följden

$$c_1 = 2, c_2 = 2^2 + 2 = 6, c_3 = 6^2 + 2 = 38, \dots$$

kommer gå mot oändligheten och är därför inte begränsad. ▲

Exempel 7.2.5. Om vi sätter $c = i$ blir de första termerna i följden

- $c_1 = i$,
- $c_2 = c_1^2 + c = i^2 + i = -1 + i$,
- $c_3 = c_2^2 + c = (-1 + i)^2 + i = 1 - 2i - 1 + i = -i$,
- $c_4 = c_3^2 + c = (-i)^2 + i = -1 + i$.

Notera nu att $c_4 = -1 + i = c_2$. Således ser vi att följden efter c_4 kommer att upprepa sig. Till att börja med är

$$c_5 = c_4^2 + c = c_2^2 + c = c_3$$

och i allmänhet har vi att $c_{n+2} = c_n$ för alla $n \geq 2$. Det betyder att det största värdet som absolutbeloppet av (c_n) kan ta i denna följd är något av talen $\|i\|$, $\|-1 + i\|$ och $\|-i\|$. Enligt Övning 7.2 är dessa tre tal mindre än $D = 2$. Därmed är denna följd begränsad vilket betyder att $i \in M$. ▲

Metoden vi använde i det förra exemplet går att använda i större allmänhet, så vi gör följande definition.

Definition 7.2.6. En komplex följd (z_n) är *periodisk* med period $m \in \mathbb{Z}_+$ om $z_n = z_{n+m}$ för alla $n \geq 1$ och m är minimal med denna egenskap. En följd är *semi-periodisk* med period m om det finns något $k \geq 1$ så att $z_n = z_{n+m}$ för alla $n \geq k$.

Exempel 7.2.7. Följden $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ är periodisk med period 2. Om vi istället betraktar följden $1, 2, 3, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ så ser vi att den är semi-periodisk med period 2 eftersom den börjar upprepa sig efter ett tag. ▲

Sats 7.2.8. En komplex talföljd (z_n) som är semi-periodisk med period $m \in \mathbb{Z}_+$ är begränsad.

Bevis. Vi måste visa att det finns något reellt tal D så att normen $\|z_n\| \leq D$ för alla $n \geq 1$. Eftersom följden (z_n) är semi-periodisk med period m så finns det ett $k \geq 1$ så att $z_n = z_{n+m}$ för alla $n \geq k$. Speciellt gäller att $z_k = z_{k+m}$. Det betyder att de enda olika termerna som förekommer i följden är $z_1, z_2, \dots, z_{k+m-1}$, och för alla $n \geq k+m$ så gäller att z_n är något av de tidigare värdena. Låt $D_n = \|z_n\|$ för $n = 1, 2, \dots, k+m-1$ och sätt D till det största av dessa. Då gäller att $\|z_n\| \leq D$ för alla $n \geq 1$ så följden är begränsad. □

Exempel 7.2.9. Vi såg i Exempel 7.2.5 att följden vi får från att välja $c = i$ är semi-periodisk, och beviset ovan är en generalisering av metoden vi använde i det exemplet för att visa att (c_n) var begränsad. ▲

Vi har nu definierat Mandelbrotmängden och har för hand bestämt huruvida några enstaka punkter tillhör mängden eller inte. Eftersom det finns oändligt många punkter i $\mathbb{C}$ så kan vi inte testa alla punkter för att undersöka om de ligger i Mandelbrotmängden, men det går ändå att skissera mängden med hjälp av datorer. Ett användbart resultat för detta ändamål är följande.

Sats 7.2.10. Låt $c \in \mathbb{C}$. Om det finns ett $n \geq 1$ så att $\|c_n\| > 2$ så är $c \notin M$. Speciellt gäller att om $\|c\| > 2$ så är $c \notin M$.

Bevis. Låt $n \geq 1$ vara det minsta heltalet så att $\|c_n\| > 2$. Då gäller även att $\|c_n\| \geq \|c\|$ eftersom om $\|c\| > 2$ så väljer vi $n = 1$ med $c_1 = c$.

Vi kan alltså anta att $\|c_n\| \geq \|c\|$ och $\|c_n\| > 2$. Från den omvända triangelolikheten, se Övning 7.5, har vi att

$$\|c_{n+1}\| = \|c_n^2 + c\| \geq \|c_n^2\| - \|c\|.$$

Eftersom $\|c\| \leq \|c_n\|$ följer att

$$\|c_{n+1}\| \geq \|c_n^2\| - \|c\| \geq \|c_n^2\| - \|c_n\|.$$

Enligt Övning 7.3 gäller att $\|c_n^2\| = \|c_n\|^2$. Vi kan därför skriva

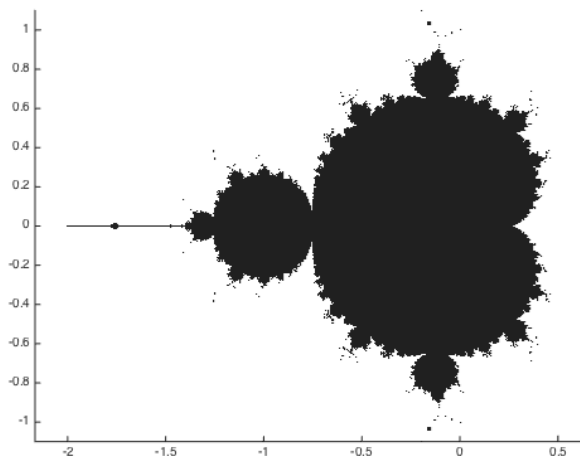
$$\|c_{n+1}\| \geq \|c_n^2\| - \|c_n\| = \|c_n\|^2 - \|c_n\| = \|c_n\| \cdot (\|c_n\| - 1).$$

Eftersom $\|c_n\| > 2$ så är $\|c_n\| - 1 > 1$. Låt $x = \|c_n\| - 1$. Vi har då visat att $\|c_{n+1}\| \geq x \cdot \|c_n\| > 2$. Genom att upprepa argumentationen för c_n utbytt mot c_{n+1} får vi att

$$\|c_{n+2}\| \geq x \cdot \|c_{n+1}\| \geq x^2 \cdot \|c_n\|.$$

I allmänhet får vi att $\|c_{n+m}\| \geq x^m \cdot \|c_n\| > 2x^m$. Eftersom $x = \|c_n\| - 1 > 1$ växer denna följd obegränsat när m växer, så $c \notin M$. $\square$

Detta resultat säger speciellt att alla element i M ligger inuti cirkeln med radie 2 och centrum i origo. Vi kan därför rita upp en skiss av Mandelbrotmängden genom att välja massor av punkter inom denna cirkel och med dator testa om de första tusen termerna i de motsvarande följderna håller sig innanför cirkeln. Gör vi detta får vi följande figur som är en bra approximation av den riktiga Mandelbrotmängden.



Figur 7.2: Mandelbrotmängden från Definition 7.2.2.

I denna figur ser det ut som att Mandelbrotmängden är symmetrisk i x -axeln. Med andra ord, det ser ut som att $c \in M$ medför att konjugatet $\bar{c} \in M$. Detta visar vi nu.

Sats 7.2.11. *Låt $c \in M$. Då gäller att $\bar{c} \in M$.*

Bevis. Låt $d = \bar{c}$ och låt (d_n) vara följden som definieras av $d_1 = \bar{c}$ och $d_{n+1} = d_n^2 + d$ för alla $n \geq 1$. Vi behöver visa att följden (d_n) är begränsad om (c_n) är det. Detta kommer vi göra genom att först visa att $d_n = \overline{c_n}$ för alla $n \geq 1$.

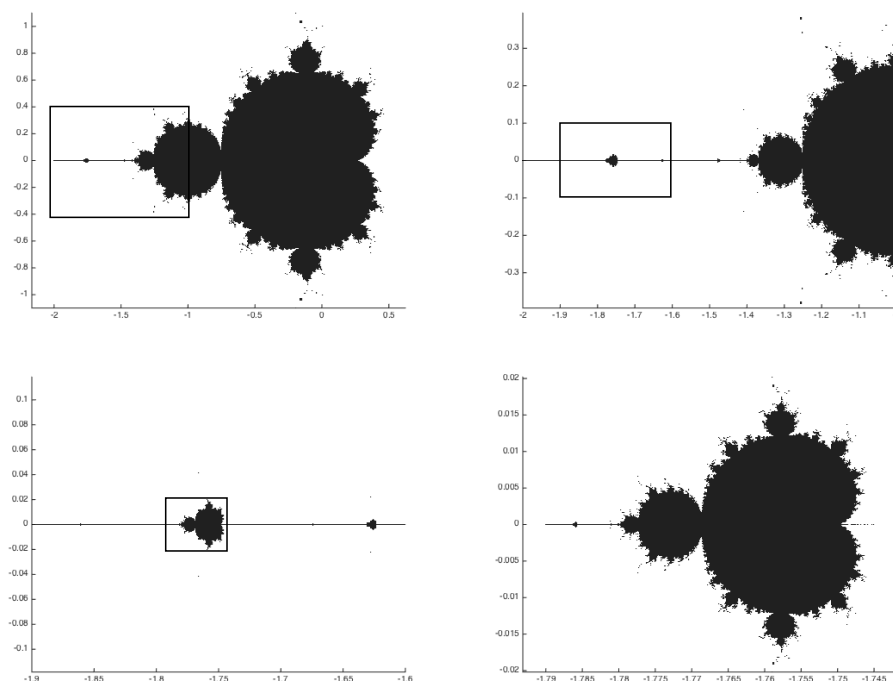
Eftersom $c_1 = c$ är det per definition sant att $d_1 = \bar{c} = \overline{c_1}$. Vi visar nu att om $d_n = \overline{c_n}$ för något n , då gäller det att $d_{n+1} = \overline{c_{n+1}}$. Antag därför att $d_n = \overline{c_n}$. Från Övning 7.6 har vi att $\overline{z^2} = \overline{z}^2$ för alla $z \in \mathbb{C}$ och även att $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Använder vi dessa två resultat får vi då att

$$d_{n+1} = d_n^2 + \bar{c} = \overline{c_n^2} + \bar{c} = \overline{c_n^2 + c} = \overline{c_{n+1}}.$$

Alltså, om $d_n = \overline{c_n}$ för något $n \geq 1$ så är även $d_{n+1} = \overline{c_{n+1}}$. Eftersom vi vet att det är sant för $n = 1$, det vill säga att $d_1 = \overline{c_1}$, följer det att $d_2 = \overline{c_2}$. Eftersom det är sant för $n = 2$ så är det därför också sant för $n = 3$, det vill säga att $d_3 = \overline{c_3}$. Därför är det också sant för $n = 4, 5, \dots$

Vi har alltså visat att $d_n = \overline{c_n}$ för alla $n \geq 1$. Enligt Övning 7.6 är $\|z\| = \|\overline{z}\|$ för alla $z \in \mathbb{C}$, så det följer nu att följden $(d_n) = (\overline{c_n})$ är begränsad om följden (c_n) är begränsad. $\square$

Man kan visa att alla de små utlöparna vi ser i Figur 7.2 har fraktala strukturer. Ett typexempel på den fraktala strukturen hos Mandelbrotmängden kan vi se nedan.



Figur 7.3: Upprepade förstoringar av Mandelbrotmängden.

Vi har hittat en mindre kopia av Mandelbrotmängden inuti Mandelbrotmängden! Med andra ord består Mandelbrotmängden av mindre kopior av sig själv.

7.3 Juliamängder

Vi vill här förklara varför Benoit Mandelbrot började studera mängden som senare fick hans namn.

Tag en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ och välj ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$. Vi definierar nu en specifik följd $z_1, z_2, \dots$ genom att låta $z_1 = f(z)$ och $z_{n+1} = f(z_n)$ för $n \geq 1$. Det betyder till exempel att $z_2 = f(z_1) = f(f(z))$ och att $z_3 = f(f(f(z)))$. Vi inför notationen $f^n(z) = f(f(\dots(f(z))\dots))$ för n stycken upprepningar av f . Då kan vi skriva $z_n = f^n(z)$ för alla $n \geq 1$.

Exempel 7.3.1. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad av $f(z) = z^2$. Låt oss studera följden $f(i), f^2(i), f^3(i), \dots$. Eftersom $f(i) = i^2 = -1$, $f^2(i) = (-1)^2 = 1$, och $f^3(i) = 1^2 = 1$, så ser vi att denna följd blir

$$-1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

På ett liknande sätt fås att följden $(f^n(2))$ är lika med $4, 16, 256, \dots$ ▲

Notera att den första följden från Exempel 7.3.1 är begränsad och att den andra följden inte är det. En funktion f kan alltså ha vissa startvärden som ger begränsade följder och vissa startvärden som ger obegränsade följder. Det kan i praktiken vara väldigt viktigt att förstå vilka startvärden som ger begränsade följder. Speciellt när väldigt små förändringar i startvärde kan ge oerhörda skillnader i effekt.

Värd att nämna i detta sammanhang är Edward Lorenz (1917–2008) som var en av de första att använda datorer för att beräkna väderprognoser med hjälp av matematiska modeller. Givet en viss form av indata hade han en avancerad och beräkningstung formel för att beräkna vädret för nästa dag. Förenklat kan vi säga att han hade en funktion f som, givet vädret z som indata, kunde beräkna vädret $f(z)$ för nästkommande dag. På så sätt kunde $f^2(z)$ ge vädret efter två dagar, $f^3(z)$ ge vädret efter tre dagar, och så vidare.

Som vi känner till från dagens väderprognoser, speciellt långtidsprognoser, så är de sällan korrekta. En anledning är att de matematiska modellerna som används är väldigt känsliga för små förändringar av startvärdet. Detta märkte även Lorenz som noterade att samma beräkning med väldigt små förändringar i indata kunde ge helt olika prognoser för vädret efter några dagar. Det är därifrån den engelska termen *the butterfly effect* härstammar, som säger att en fjärils vingslag kan skapa en storm på andra sidan jordklotet. Med andra ord, små förändringar i indata, motsvarande en fjärils vingslag, kan skapa enorma skillnader i hur vädret förändras över tiden, och kan till och med orsaka stormar.

Ett intressant forskningsämne är därför att förstå hur dessa följder $(f^n(z))$ beter sig för olika funktioner f och olika startvärden z . Speciellt kan det vara viktigt att förstå när dessa följder börjar växa och bli väldigt stora, som i fallet med de stormar som kan orsakas av en fjärils vingslag. I syftet att studera vilka startvärden som ger begränsade funktioner gör vi följande definition.

Definition 7.3.2. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara en funktion. Mängden

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{följden } (f^n(z)) \text{ är begränsad}\}$$

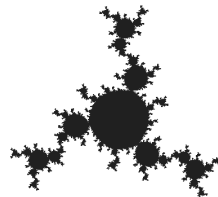
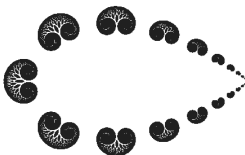
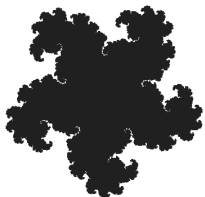
kallas för den *ifyllda Juliamängden* till funktionen f .

Givet en funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ så består alltså den ifyllda Juliamängden K_f av de startvärden $z \in \mathbb{C}$ så att följden

$$f(z), f^2(z), f^3(z), \dots$$

är begränsad. Dessa mängder kan, precis som Mandelbrotmängden, ha väldigt speciella utseenden.

Exempel 7.3.3. Nedan visar vi tre exempel på ifyllda Juliamängder K_f för tre olika funktioner $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

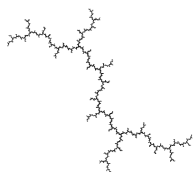


$$f(z) = z^5 - 0.8 + 0.64i. \quad f(z) = z^{1.5} - 0.2. \quad f(z) = z^3 + 1.085i + 0.2.$$

Alla dessa har fraktala strukturer. ▲

Vi kommer framöver enbart intressera oss för fallet då $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ är på formen $f(z) = z^2 + c$ för någon konstant $c \in \mathbb{C}$.

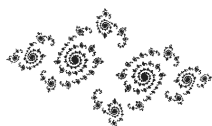
Exempel 7.3.4. Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara definierad av $f(z) = z^2 + c$ för någon konstant c . Nedan visar vi de ifyllda Juliamängderna för fyra olika val av konstanten c .



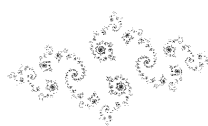
$$c = i.$$



$$c = -0.8 - 0.15i.$$



$$c = -0.75 + 0.25i.$$



$$c = -0.8 - 0.19i.$$

Notera att de ifyllda Juliamängderna kan se väldigt olika ut, för olika värden på konstanten c . De två högra bilderna har värden på c som skiljer sig åt med enbart $0.04i$, men mängderna ser ändå helt olika ut. Vi ser även att de två övre mängderna båda ser ut att bestå av varsin komponent medan de två undre består av flera separata bitar. Detta kommer vara av intresse för resultatet av Sats 7.3.8. ▲

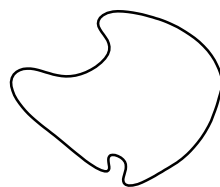
För att kunna förklara det sista resultatet i detta kompendium behöver vi gå igenom några fler begrepp.

Definition 7.3.5. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{C}$. *Randen* av X består av de punkter $z \in \mathbb{C}$ som för varje ifylld cirkelskiva med z som mittpunkt innehåller punkter både i och utanför X .

Oftast kan man enkelt tänka på randen så som i figurerna nedan.



En mängd X .



Randen till mängden X .

Exempel 7.3.6. Man kan till exempel betrakta randen av Mandelbrotmängden. Häpnadsväckande nog har denna mängd fraktal dimension 2 – precis som Hilbertkurvan. ▲

Definition 7.3.7. Låt $c \in \mathbb{C}$ och definiera funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genom $f(z) = z^2 + c$. Vi definierar *Juliamängden* J_f till f som randen av den ifyllda Juliamängden K_f .

Juliamängder är uppkallade efter matematikern Gaston Julia (1893–1978) som, samtidigt med matematikern Pierre Fatou (1878–1929), studerade olika system som gav upphov till sådana mängder. Deras resultat inspirerade senare Benoit Mandelbrot att studera Mandelbrotmängden.

Ett sista matematiskt begrepp som vi behöver nämna är *sammanhängande* mängder. En sammanhängande mängd kan intuitivt beskrivas som en mängd som sitter ihop och består av en enda komponent. Vi utelämnar den matematiskt rigorösa definitionen för detta och ber om läsarens overseende.

Man kan med relativt avancerade metoder visa att Mandelbrotmängden är sammanhängande. Detta bevisades av matematikerna Adrien Douady och John Hubbard i början av 1980-talet. De var även de första som kallade denna mängd för just Mandelbrotmängden.

En intressant poäng i sammanhanget är att man länge trodde att Mandelbrotmängden inte var sammanhängande. Anledningen var att dåtidens datorer inte klarade av att göra lika många beräkningar som dagens datorer, och den datorgenererade bilden man fick fram av Mandelbrotmängden såg ut att bestå av flera separata komponenter. Detta kan vi även se i Figur 7.2, där några få punkter inte är sammanbundna med resten av figuren, eftersom bilden inte är tillräckligt högupplöst.

Följande sats har vi inte möjlighet att bevisa i detta kompendium – särskilt eftersom vi inte gett någon rigorös definition för begreppet sammanhängande – men som motiverar varför Mandelbrotmängden är intressant.

Sats 7.3.8. Mandelbrotmängden M ges av de $c \in \mathbb{C}$ så att Juliamängden J_{f_c} med $f_c(z) = z^2 + c$ är sammanhängande.

Exempel 7.3.9. I Exempel 7.3.4 har vi ritat upp de ifyllda Juliamängderna och inte bara deras ränder som är de egentliga Juliamängderna. Oavsett gäller att de två övre figurerna har sammanhängande ränder så de motsvarande konstanterna c tillhör Mandelbrotmängden. De två undre är inte sammanhängande så de motsvarande konstanterna c för dessa figurer tillhör *inte* Mandelbrotmängden.

Notera att konstanterna i de två högra bilderna skiljer sig åt med enbart $0.04i$, trots att den ena mängden är sammanhängande och den andra inte är det. Detta kan vi nu förstå från Figur 7.2 eftersom $c = -0.8 - 0.15i$ ligger väldigt nära randen av Mandelbrotmängden. Då Juliamängden till $c = -0.8 - 0.19i$ inte är sammanhängande inser vi att detta c ligger precis utanför Mandelbrotmängden. Punkter på randen av Mandelbrotmängden är alltså instabila och väldigt små förändringar av dessa, motsvarande en fjärils vingslag, kan ge upphov till helt olika Juliamängder. ▲

Övningar

Övning 7.1 (★). Visa att $z = 1 + 3i$ är en lösning till $z^2 - 2z + 10 = 0$.

Övning 7.2 (★). Beräkna $\|i\|$, $\|-1 - i\|$ och $\|-i\|$.

Övning 7.3 (★★). Visa att $\|z^2\| = \|z\|^2$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Övning 7.4 (★). Visa att $z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$.

Övning 7.5 (★). Visa den *omvända triangelolikheten* i $\mathbb{C}$ som säger att

$$\|z_1 - z_2\| \geq \|z_1\| - \|z_2\|$$

för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Använd detta för att visa att $\|z_1 + z_2\| \geq \|z_1\| - \|z_2\|$ för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. (*Ledning*: Jämför med Övning 6.9.)

Övning 7.6 (★★). Visa följande egenskaper hos det komplexa konjugatet.

- (i) Visa att $\|\bar{z}\| = \|z\|$ för alla $z \in \mathbb{C}$.
- (ii) Visa att $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- (iii) Visa att $\overline{z^2} = \bar{z}^2$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Övning 7.7 (★). Tillhör talet 1 Mandelbrotmängden?

Övning 7.8 (★★). Bestäm om c tillhör Mandelbrotmängden för:

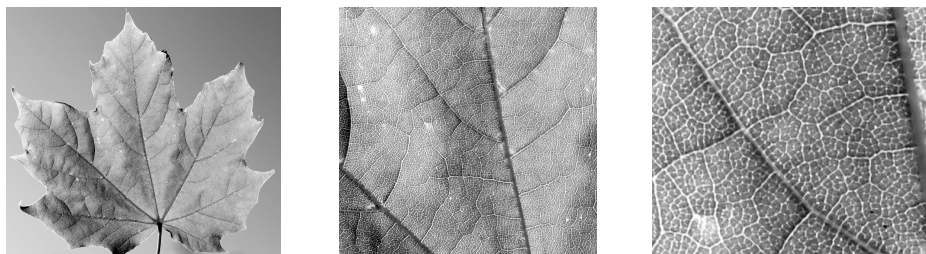
- $c = -1$,
- $c = -2$,
- $c = -3$,
- $c = -i$.

Övning 7.9 (★★). Visa att talet $\frac{1}{4}$ tillhör Mandelbrotmängden. (*Ledning*: Låt $f(z) = z^2 + \frac{1}{4}$ och visa att om $z \in [0, \frac{1}{2}]$ så gäller att $f(z) \in [0, \frac{1}{2}]$.)

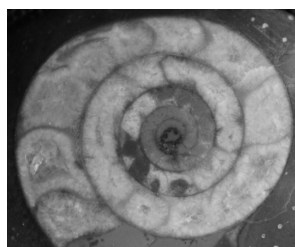
Övning 7.10 (★★★). Låt $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definieras av $f(z) = z^2$. Rita upp den ifyllda Juliamängden K_f till f .

8 Fraktaler i naturen

Benoit Mandelbrot hävdade att vår värld består av fraktaler. Är det sant? Teorier är aldrig perfekta utan kan enbart ge modeller som approximerar verkligheten till en viss grad. Tittar vi på följande bilder, tagna av kompendieförfattarna, så kan man dock få en känsla av att Mandelbrot hade rätt.



Figur 8.1: Ett löv i tre förstoringar.



Figur 8.2: En fossil.



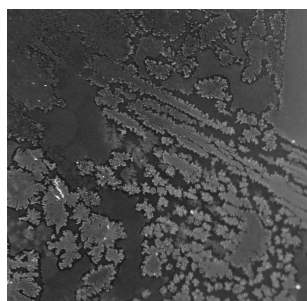
Figur 8.3: En fetbladsväxt.



Figur 8.4: En romanesco i två förstoringar.



Figur 8.5: Ett träd.



Figur 8.6: Frost.

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1.

- (i) $B \cup C = A$.
- (ii) $B \cap C = \emptyset$.
- (iii) $D \cap C = \{4, 36\}$.
- (iv) $\{x \in D \mid x \in B\} = D \cap B = \{1, 19, 101\}$.
- (v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.
- (vi) $\{x + 1 \mid x \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.

Övning 1.3. Tag $x \in \mathbb{N}$, det vill säga att x är något av talen $0, 1, 2, 3, \dots$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \dots, x\} = B_x$ och därmed $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Eftersom x var godtycklig visar detta att $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

Omvänt, antag att $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Det betyder att det finns ett heltal $n \geq 1$ så att $x \in B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. Detta visar att $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$.

Eftersom båda inklusioner $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ och $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$ gäller kan vi dra slutsatsen att $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

Övning 1.5. (i) Nej, $\sqrt{x}$ finns inte i $\mathbb{R}$ för negativa x . Men $f(x) = \sqrt{x}$ ger en funktion från $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ till $\mathbb{R}$.

(ii) Nej, det sägs inte vad $f(1)$ ska vara. Med om vi till exempel sätter $f(1) = \star$ blir det en funktion.

(iii) Nej, det finns två olika värden för $f(a)$. Om vi tar bort det ena blir det en funktion.

Övning 1.7. Alla utom "Mängden av de naturliga talen" är påståenden. Det enda påståendet för vilket vi kan avgöra om det är sant eller falskt är "Varje mängd innehåller minst ett element", och detta påstående är falskt eftersom den tomma mängden inte innehåller något element.

Övning 1.9. Vi ger två exempel som visar att kravet behövs. Om vi *inte* har att $x, y \geq 0$ så finns två fall. Antingen är både x och y negativa eller så är precis en av dem negativa.

Om båda är negativa så kan vi ta följande exempel: Låt $x = -1$ och $y = -2$. Då gäller att $x \geq y$. Vi beräknar $x^2 = (-1)^2 = 1$ och $y^2 = (-2)^2 = 4$, så det följer att

$$x^2 = 1 < 4 = y^2.$$

Om precis en är negativ, säg y , så kan vi till exempel välja: $x = 1$ och $y = -2$. Då gäller att $x \geq y$ men $x^2 = 1^2 = 1 < 4 = (-2)^2 = y^2$.

Övning 2.1. Vi räknar ut dem en efter en.

- $n = 1$: Då är $x_1 = \frac{1^2+2}{1} = 3$.
- $n = 2$: Då är $x_2 = \frac{2^2+2}{2} = 3$.
- $n = 3$: Då är $x_3 = \frac{3^2+2}{3} = \frac{11}{3}$.
- $n = 4$: Då är $x_4 = \frac{4^2+2}{3} = 6$.

De första fyra termerna är alltså $3, 3, \frac{11}{3}, 6$.

Övning 2.3. Denna fråga kan omformuleras till: vilka x ligger på avstånd som mest 4 från talet 2. Ritar vi upp tallinjen och markerar talet 2 så ser man då direkt att $-2 \leq x \leq 6$.

Man kan också räkna ut det på följande sätt. Det finns två fall, antingen är $x - 2 \geq 0$ eller så är $x - 2 < 0$.

I fallet då $x - 2 \geq 0$ så är $x \geq 2$ och $x - 2 = |x - 2| \leq 4$. Dessa olikheter ger att $2 \leq x \leq 6$. I fallet då $x - 2 < 0$ så är $x < 2$ och $-(x - 2) = |x - 2| \leq 4$. Detta kan skrivas om till $x < 2$ och $x - 2 \geq -4$, vilket ger att $-2 \leq x < 2$.

Sammanställer vi resultaten ovan får vi att $|x - 2| \leq 4$ precis då $-2 \leq x \leq 6$.

Övning 2.5. Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom (x_n) konvergerar mot a så finns ett N_1 så att $|x_n - a| < \varepsilon$ för alla $n \geq N_1$. Eftersom det bara finns ändligt många tal n med $x_n \neq y_n$ så finns ett tal N_2 så att $x_n = y_n$ för alla $n \geq N_2$. Låt nu $N = \max(N_1, N_2)$. För alla $n \geq N$ gäller då att $x_n = y_n$ vilket ger att

$$|y_n - a| = |x_n - a| < \varepsilon.$$

Följden (y_n) konvergerar därför mot a .

Övning 2.7. (i) Följden (a_n) är definierad av $a_n = \frac{3^{n-1}\sqrt{3}}{4^n}$ för varje $n \geq 1$. Observera att $\frac{3^{n-1}\sqrt{3}}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3^n}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Enligt Övning 2.6 konvergerar följden $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ mot 0 eftersom $\frac{3}{4} < 1$. Enligt Sats 2.3.1 gäller då även att $a_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergerar mot 0.

(ii) Följden (l_n) är definierad av $l_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$ för varje $n \geq 1$. Notera att $\frac{3^n}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{3^n}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Tag $K > 0$. Eftersom $\frac{3}{2} > 1$ finns, enligt egenskapen som nämnts i uppgiftslydelsen till Övning 2.6, $N \geq 1$ så att $\left(\frac{3}{2}\right)^n > K$ för alla $n \geq N$. Då gäller även att $l_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n > K$ för alla $n \geq N$ så följden går mot oändligheten.

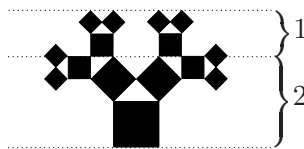
Övning 2.9. (i) Det är klart att höjden av denna figur är summan av $r + d$ där d är diagonalen av kvadraten med sidlängd $\frac{r}{\sqrt{2}}$. Med hjälp av Pythagoras sats beräknas diagonalen av kvadraten till

$$d = \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{r^2}{2}} = \sqrt{r^2} = r.$$

Därmed är höjden lika med $r + d = r + r = 2r$.

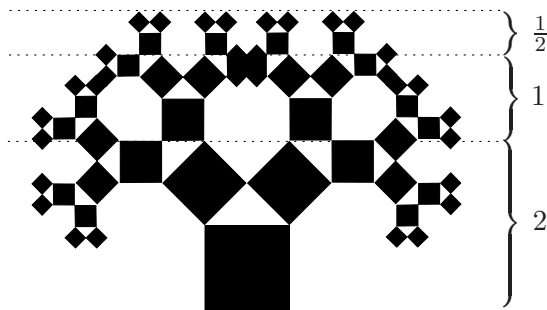
- (ii) Eftersom den ursprungliga kvadraten har sidlängd 1 gäller att höjden av T_2 är $2 \cdot 1 = 2$ enligt (i).

Notera att vi skapat T_4 genom att placera flera kopior av Y_r ovanpå T_2 där r är sidlängden av de minsta kvadraterna i T_3 , och enligt Exempel 2.2.13 är $r = \frac{1}{2}$. Per konstruktion är höjden av T_4 lika med summan av höjden av T_2 och höjden av $Y_r = Y_{1/2}$. Höjden av T_2 räknade vi ovan ut till 2 och höjden av $Y_{1/2}$ är lika med 1 enligt (i).



Därmed är höjden av T_4 lika med $2 + 1 = 3$.

På samma sätt är T_6 konstruerad genom att placera figurer $Y_{1/4}$ ovanpå T_4 . Eftersom höjden av T_4 är 3 och höjden av $Y_{1/4}$ är $\frac{1}{2}$, enligt (i), får vi att höjden av T_6 är $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.



- (iii) Låt h_n vara höjden av T_{2n} för $n \geq 1$. Från ovan har vi att $h_1 = 2$, $h_2 = 2 + 1 = 3$ och $h_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Vi inser att T_8 kommer ha höjd $h_4 = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ och i allmänhet att

$$h_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = 2 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

När $n \rightarrow \infty$ får vi höjden av Pythagoras träd till

$$h = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Enligt Exempel 2.3.2 fås därmed att

$$h = 2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4.$$

- (iv) Låt b_n vara bredden av T_{2n} för $n \geq 1$. Vi ser på samma som ovan att bredden av T_2 är $b_1 = 2$, att bredden av T_4 är $b_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ och att

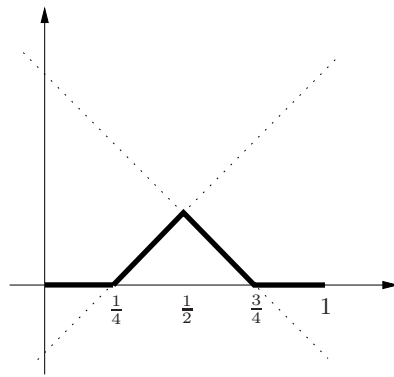
höjden av T_6 är $b_3 = 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$. I allmänhet inser vi att bredden av T_{2n} är

$$b_n = 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = 2 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

När $n \rightarrow \infty$ får vi bredden av Pythagoras träd som vi med Exempel 2.3.2 kan beräkna till

$$b = 2 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 + 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 2 \cdot 2 = 6.$$

Övning 3.1. Vi ritar ut de två hjälplinjerna $y = x - \frac{1}{4}$ och $y = -x + \frac{3}{4}$. Med hjälp av dessa kan vi rita upp funktionsgrafen som unionen av de feta linjesegmenten nedan:



Övning 3.3. Tag $\varepsilon > 0$. För $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$|f(x) - f(0)| = |x^2 - 0^2| = |x^2| = |x|^2 = |x - 0|^2.$$

Vi väljer nu $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ vilket ger att

$$|f(x) - 0| = |x - 0|^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $|x - 0| < \delta$.

Övning 3.5. Fixera $p \in X$ och tag $\varepsilon > 0$. För alla $x \in X$ gäller att

$$|f(x) - f(p)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{p - x}{xp} \right| = \frac{|x - p|}{|x| \cdot |p|}.$$

Eftersom $\frac{1}{|x|} < 1$ för alla $x \geq 1$ gäller att

$$|f(x) - f(p)| = \frac{|x - p|}{|x| \cdot |p|} = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x - p|}{|p|} \leq \frac{|x - p|}{|p|}.$$

Välj $\delta = |p|\varepsilon$. Då gäller att

$$|f(x) - f(p)| \leq \frac{|x - p|}{|p|} < \frac{\delta}{|p|} = \frac{|p|\varepsilon}{|p|} = \varepsilon$$

för alla $x \in X$ med $|x - p| < \delta$.

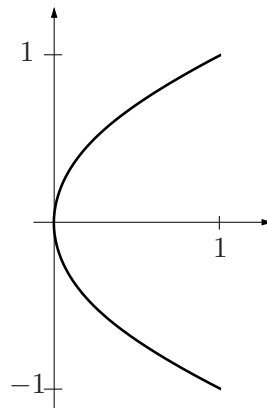
Övning 3.7. Tag $p \in X$ och låt (x_n) vara en följd i X som konvergerar mot p . Eftersom f är kontinuerlig så säger Sats 3.2.7 att $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$. På samma sätt gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(p)$. Nu följer det från Sats 2.3.1 att

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= f(p) + g(p) = h(p).\end{aligned}$$

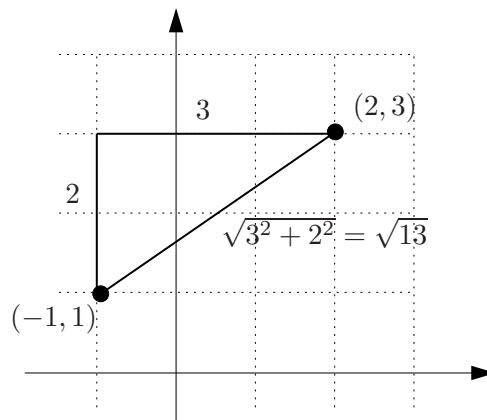
Enligt Sats 3.2.7 är därför h kontinuerlig i p . Eftersom p var godtycklig gäller det att h är kontinuerlig i varje punkt $p \in X$.

Övning 3.9. Låt $f_1(x) = 2x+2$ för $0 \leq x \leq 1$ och $f_2(x) = \frac{3}{x}+1$ för $1 \leq x \leq 2$. Vi har att $f_1(x)$ är kontinuerlig från Exempel 3.2.8. Enligt Övning 3.5 är $g(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig för alla $x \geq 1$. Speciellt är g kontinuerlig för $1 \leq x \leq 2$. Från Övning 3.7 och Övning 3.8 så är därför $f_2(x) = 3g(x) + 1$ kontinuerlig. Eftersom $f_1(1) = 4 = f_2(1)$ så är f kontinuerlig enligt Sats 3.3.1.

Övning 4.1. Bilden av funktionen $G: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ med $G(t) = (t, t^2)$ är den välkända andragradskurvan $y = x^2$. För varje t gäller här istället att $F(t) = (x, y)$ där $x = y^2$. Detta är den vanliga kurvan $y = x^2$ där vi bytt plats på x och y . Bilden av F är därför följande bild.



Övning 4.3. Vi har att $(2, 3) - (-1, 1) = (2 - (-1), 3 - 1) = (3, 2)$. Därför är $\|(2, 3) - (-1, 1)\| = \|(3, 2)\| = \sqrt{13}$. Bilden visar att normen räknar ut avståndet med hjälp av Pythagoras sats.



Övning 4.5. Tag ett $p \in [a, c]$. Om $p \neq b$ så ligger p i precis ett av intervallen $[a, b]$ och $[b, c]$. Eftersom både F_1 och F_2 är kontinuerliga så följer det att F är kontinuerlig i p . Det är alltså klart att $F: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i alla punkter utom b . Eftersom $F_1(b) = F(b)$ återstår därför att visa att F är kontinuerlig i b om och endast om $F(b) = F_2(b)$.

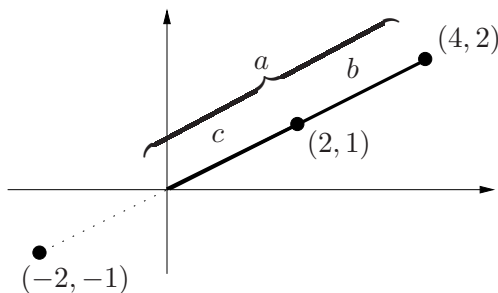
Antag att F är kontinuerlig i b . Låt (t_n) vara definierad av $t_n = b + \frac{1}{n}$ för alla $n \geq 1$. Då gäller att $t_n > b$ för alla n så $F(t_n) = F_2(t_n)$. Eftersom både F och F_2 är kontinuerliga följer från Sats 4.3.5 att

$$F_2(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_2(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(b).$$

Alltså, om F är kontinuerlig i b så är $F_2(b) = F(b)$.

Antag nu istället att $F(b) = F_1(b) = F_2(b)$. Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom F_1 är kontinuerlig finns $\delta_1 > 0$ så att $\|F_1(t) - F_1(b)\| < \varepsilon$ för alla $t \in [a, b]$ med $|t - b| < \delta_1$. Med andra ord är $\|F_1(t) - F_1(b)\| < \varepsilon$ om $b - \delta_1 < t \leq b$. På samma sätt är F_2 kontinuerlig så det finns $\delta_2 > 0$ så att $\|F_2(t) - F_2(b)\| < \varepsilon$ för alla t som uppfyller $b \leq t < b + \delta_2$. Sätt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Då gäller att $\|F(t) - F(b)\| < \varepsilon$ för alla $t \in [a, c]$ med $|t - b| < \delta$, det vill säga att F är kontinuerlig i b .

Övning 4.7. Vi har att $(4, 2) + (-2, -1) = (2, 1)$. I detta fall ser vi att "triangeln" enbart är ett linjesegment eftersom $(4, 2)$ och $(-2, -1)$ ligger på samma linje genom origo. Argumentet i beviset håller dock fortfarande – den kortaste vägen från origo till $(2, 1)$ är linjen med längd c , och sträckan $a + b$ svarar mot att först gå hela vägen till punkten $(4, 2)$ och sedan gå tillbaka till $(2, 1)$.



Övning 4.9. Vi ska visa att två påståenden är ekvivalenta.

Antag först att F är kontinuerlig. Fixera $p \in X$ och tag $\varepsilon > 0$. Enligt antagandet finns då $\delta > 0$ så att $\|F(t) - F(p)\| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$. Eftersom $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$ för alla $t \in X$ får vi att

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(p)\| &= \|(f_1(t), f_2(t)) - (f_1(p), f_2(p))\| \\ &= \sqrt{(f_1(t) - f_1(p))^2 + (f_2(t) - f_2(p))^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$. Detta ger att

$$(f_1(t) - f_1(p))^2 + (f_2(t) - f_2(p))^2 < \varepsilon^2.$$

Eftersom kvadrater aldrig är negativa så betyder det att både

$$(f_1(t) - f_1(p))^2 < \varepsilon^2 \quad \text{och} \quad (f_2(t) - f_2(p))^2 < \varepsilon^2.$$

Genom att applicera kvadratroten på bägge sidorna av den vänstra olikheten får vi nu med hjälp av ledningen att

$$|f_1(t) - f_1(p)| = \sqrt{(f_1(t) - f_1(p))^2} < \varepsilon.$$

Alltså gäller att $|f_1(t) - f_1(p)| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$, så f_1 är kontinuerlig i p . Då $p \in X$ var godtycklig så gäller att f_1 är kontinuerlig i alla punkter. På samma sätt följer att f_2 är kontinuerlig.

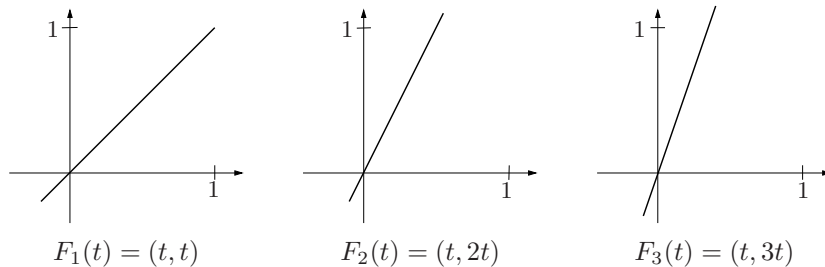
Omvänt, antag att f_1 och f_2 är kontinuerliga. Fixera $p \in X$ och tag $\varepsilon > 0$. Sätt $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Eftersom f_1 är kontinuerlig så finns $\delta_1 > 0$ så att $|f_1(t) - f_1(p)| < \hat{\varepsilon}$ för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta_1$. På samma sätt finns $\delta_2 > 0$ så att $|f_2(t) - f_2(p)| < \hat{\varepsilon}$ för alla $|t - p| < \delta_2$. Låt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Då gäller att

$$\|F(t) - F(p)\| = \sqrt{(f_1(t) - f_1(p))^2 + (f_2(t) - f_2(p))^2} < \sqrt{\hat{\varepsilon}^2 + \hat{\varepsilon}^2} = \sqrt{2}\hat{\varepsilon} = \varepsilon$$

för alla $t \in X$ med $|t - p| < \delta$. Detta betyder att F är kontinuerlig i p . Då $p \in X$ var godtycklig så gäller att F är kontinuerlig i alla punkter.

Vi har alltså visat att om F är kontinuerlig så är f_1 och f_2 kontinuerliga, samt omvändningen.

Övning 5.1. För varje $n \geq 1$ så är bilden av F_n lika med linjen $y = nx$ som går genom origo med lutning n .



Övning 5.3. Tag $\varepsilon > 0$ och låt $N > \frac{1}{\varepsilon}$. För alla $t \in [-1, 1]$ och $n \geq 1$ gäller att

$$\|F(t) - F_n(t)\| = \left\| (t, 0) - \left(t, \frac{t^2}{n}\right) \right\| = \left\| \left(0, \frac{t^2}{n}\right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{t^2}{n}\right)^2} = \frac{t^2}{n}.$$

Eftersom $t \in [-1, 1]$ så gäller att $0 \leq t^2 \leq 1$ så

$$\|F(t) - F_n(t)\| = \frac{t^2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

för alla $n \geq N$. Följden (F_n) konvergerar alltså likformigt mot F .

Övning 5.5. Antag att (F_n) är en likformig Cauchyföljd och tag $\varepsilon > 0$. Då ska det finnas ett $N \geq 1$ så att $\|F_n(t) - F_m(t)\| < \varepsilon$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och $m, n \geq N$. Fixera N . Speciellt ska ovanstående olikhet då gälla för $n = N$ och $m = N + 1$.

För $t \in \mathbb{R}$ och $m = N + 1$ och $n = N$ har vi att

$$\begin{aligned}\|F_N(t) - F_{N+1}(t)\| &= \left\| \left(t, \frac{t^2}{N}\right) - \left(t, \frac{t^2}{N+1}\right) \right\| = \left\| \left(0, \frac{t}{N} - \frac{t}{N+1}\right) \right\| \\ &= \left| \frac{t}{N} - \frac{t}{N+1} \right| = |t| \cdot \left| \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right| \\ &= |t| \cdot \frac{(N+1) - N}{N(N+1)} = |t| \cdot \frac{1}{N(N+1)}.\end{aligned}$$

Oavsett hur stort N är gäller alltså att om $t > \varepsilon \cdot N(N+1)$ så är

$$\|F_N(t) - F_{N+1}(t)\| = |t| \cdot \frac{1}{N(N+1)} > \varepsilon \cdot N(N+1) \cdot \frac{1}{N(N+1)} = \varepsilon.$$

Det kan alltså inte finnas ett N med den önskade egenskapen, så följderna (F_n) är *inte* en likformig Cauchyföljd.

Exempel 5.1.4 visar att samma följd är en likformig Cauchyföljd i fallet då $t \in [-1, 1]$. Ovanstående resonemang är inte giltigt i det fallet eftersom vi inte kan välja t godtyckligt stort.

Övning 5.7. Det verkar troligt att (G_n) konvergerar mot $G(t) = (g(t), f(t))$. För att visa detta: tag $\varepsilon > 0$. Eftersom (F_n) konvergerar mot F så finns $N \geq 1$ så att $\|F(t) - F_n(t)\| < \varepsilon$ för alla $t \in X$ och $n \geq N$. Notera att

$$\begin{aligned}\|F(t) - F_n(t)\| &= \|(f(t), g(t)) - (f_n(t), g_n(t))\| \\ &= \|(f(t) - f_n(t), g(t) - g_n(t))\| \\ &= \sqrt{(f(t) - f_n(t))^2 + (g(t) - g_n(t))^2}\end{aligned}$$

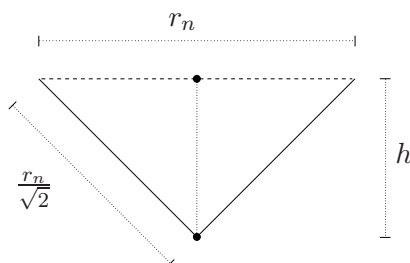
för alla $t \in X$. På samma sätt får vi att

$$\begin{aligned}\|G(t) - G_n(t)\| &= \sqrt{(g(t) - g_n(t))^2 + (f(t) - f_n(t))^2} \\ &= \sqrt{(f(t) - f_n(t))^2 + (g(t) - g_n(t))^2} \\ &= \|F(t) - F_n(t)\| < \varepsilon\end{aligned}$$

för alla $t \in X$ och $n \geq N$. Följden (G_n) konvergerar alltså mot G .

Övning 5.9. Skriv $r_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ för längden av varje linjesegment i D_n .

Per konstruktion gäller att det maximala avståndet mellan $D_n(t)$ och $D_{n+1}(t)$ kommer vara höjden i triangeln:



Denna höjd beräknas med Pythagoras sats till

$$h = \sqrt{\left(\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{r_n}{2}\right)^2} = \frac{r_n}{2} = \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} < \frac{1}{(\sqrt{2})^n}.$$

Övning 6.1. Från konstruktionen går varje kurva H_n genom mittpunkterna av de 4^n kvadraterna av sidlängd $\frac{1}{2^n}$, vilket medför att H_n består av $4^n - 1$ stycken linjesegment av längd $\frac{1}{2^n}$. Med notationen från Definition 6.1.3 låter vi därför $r_n = \frac{1}{2^n}$ och $k_n = 4^n - 1$. Då gäller att

$$k_n \cdot r_n^d = (4^n - 1) \cdot \frac{1}{2^{dn}} = \frac{4^n}{(2^d)^n} - \frac{1}{(2^d)^n} = \left(\frac{4}{2^d}\right)^n - \left(\frac{1}{2^d}\right)^n.$$

Vi söker det minsta $d \geq 0$ så att denna följd konvergerar mot något ändligt tal då $n \rightarrow \infty$. Det är klart att denna följd växer obegränsat om $d = 0$ så vi kan anta att $d > 0$. Eftersom $\frac{1}{2^d} < 1$ om $d > 0$ så följer det från Övning 2.6 att $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^d}\right)^n = 0$. Vi har därmed att

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (L_n \cdot r_n^d) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{4}{2^d}\right)^n - \left(\frac{1}{2^d}\right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^d}\right)^n - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^d}\right)^n}_{=0} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^d}\right)^n. \end{aligned}$$

Denna följd kommer växa obegränsat om $\frac{4}{2^d} > 1$. Notera att $\frac{4}{2^d} \leq 1$ om och endast om $4 \leq 2^d$ vilket ger att $d \geq 2$. Om $d = 2$ så är $\frac{4}{2^d} = \frac{4}{4} = 1$ och vi får att $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^d}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Alltså är den fraktala dimensionen lika med $d = 2$.

Övning 6.3. Låt (J_n) vara följden i Exempel 5.3.7. Vi visade i Exempel 6.1.2 att det för Kochkurvan gällde att K_n bestod av 4^{n-1} stycken linjesegment av längd $\frac{1}{3^{n-1}}$. Kochsnöflingan är konstruerad på samma sätt som Kochkurvan, den enda skillnaden är att första termen i följden är består av tre linjesegment av längd 1 istället för bara ett linjesegment. I varje steg kommer därför J_n bestå av tre gånger så många linjer som K_n . Därmed gäller att J_n består av $3 \cdot 4^{n-1}$ stycken linjesegment av längd $\frac{1}{3^{n-1}}$. Med notationen från Definition 6.1.3 har vi alltså att $r_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ och $k_n = 3 \cdot 4^{n-1}$. Då gäller att

$$x_n = k_n \cdot r_n^d = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{d(n-1)}} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3^d}\right)^{n-1}.$$

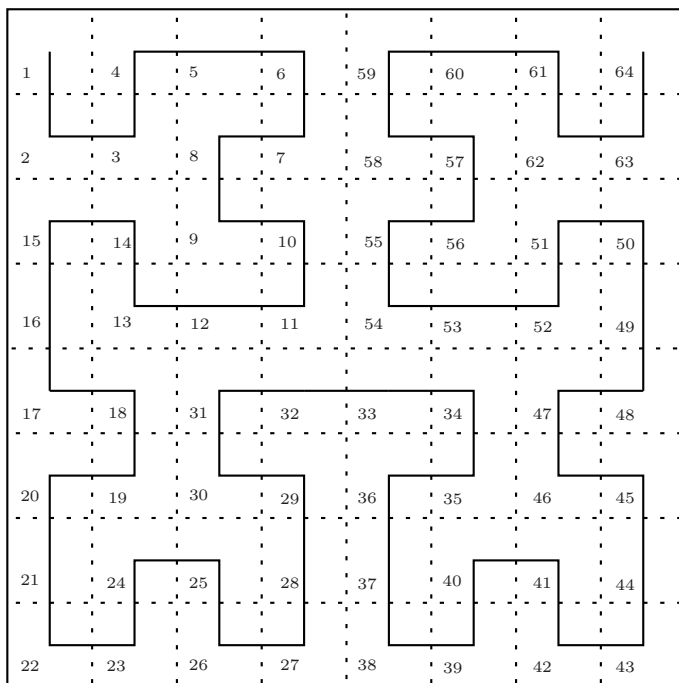
för alla $n \geq 1$.

Faktorn 3 spelar ingen roll för konvergensen så det följer att den fraktala dimensionen av Kochsnöflingan är samma som för Kochkurvan, vilket var $d = \log_3(4) \approx 1.26$.

Övning 6.5. (i) För varje $n \geq 1$ låter vi $F_n(t) = F(t)$. Bilden av F är per definition ett linjesegment, och ett sådant är en union av n stycken linjesegment av längd $\frac{1}{n}$. Därför gäller uppenbart att följden (F_n) konvergerar mot F .

- (ii) Med notationen från Definition 6.1.3 har vi att $r_n = \frac{1}{n}$ och $k_n = n$. Då gäller att $x_n = k_n \cdot r_n^d = n \cdot \frac{1}{n^d} = \frac{n}{n^d} = n^{1-d}$. Om $d < 1$ så är $a = 1 - d > 0$. I så fall är $x_n = n^a$ vilket växer obegränsat. Om $d = 1$ så gäller att $x_n = 1$ vilket konvergerar mot 1. Alltså är $d = 1$ det minsta talet så att följderna konvergerar, så den fraktala dimensionen är lika med 1.

Övning 6.7. Vi numrerar kvadraterna på följande sätt:



Kurvan H_3 .

Per konstruktion har vi valt H_3 så att $H_3(t)$ ligger i kvadrat i precis då $t \in [\frac{i-1}{64}, \frac{i}{64}]$. Med $i = 18$ gäller alltså att $H_3(t)$ ligger i kvadrat 18 precis då

$$t \in \left[\frac{17}{64}, \frac{18}{64} \right].$$

Övning 6.9. (i) Vi följer ledningen och ser att

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Detta är ekvivalent med $|x| - |y| \leq |x - y|$. På samma sätt får vi att $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Eftersom $|y| - |x| = -(|x| - |y|)$ följer det att $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

- (ii) Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom (x_n) konvergerar mot a finns $N \geq 1$ så att $|x_n - a| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Med hjälp av den omvända triangelolikheten får vi nu direkt att

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$$

för alla $n \geq N$. Alltså konvergerar $(|x_n|)$ mot $|a|$.

Övning 7.1. Vi räknar ut $z^2 = (1 + 3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$. Därmed ser vi att

$$z^2 - 2z + 10 = (-8 + 6i) - 2(1 + 3i) + 10 = (-8 - 2 + 10) + (6i - 6i) = 0.$$

Övning 7.3. Låt $z = a + bi$. Då gäller att

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi,$$

så

$$\begin{aligned}\|z^2\| &= \|(a^2 - b^2) + (2ab)i\| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Vi har även att

$$\|z\|^2 = \|a + bi\|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Vi har alltså att $\|z^2\| = a^2 + b^2 = \|z\|^2$.

Övning 7.5. Vi har att

$$\|z_1\| = \|z_1 - z_2 + z_2\| \leq \|z_1 - z_2\| + \|z_2\|.$$

Genom att subtrahera båda sidorna med $\|z_2\|$ får vi att $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 - z_2\|$.

Övning 7.7. Låt $c = c_1 = 1$. Med notationen från Definition 7.2.2 får vi då att $c_2 = c^2 + c = 1^2 + 1 = 2$ och $c_3 = c_2^2 + c = 2^2 + 1 = 5 > 2$. Enligt Sats 7.2.10 följer därför att 1 *inte* tillhör Mandelbrotmängden.

Övning 7.9. Låt $c = \frac{1}{4}$. Då vill vi visa att följderna (c_n) från Definition 7.2.2 är begränsad.

Vi följer ledningen och studerar funktionen $f(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Om $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ så gäller att $0 \leq z^2 \leq \frac{1}{4}$. Därmed är $0 \leq z^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$. Alltså, om $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ så gäller att $0 \leq f(z) \leq \frac{1}{2}$.

Med $c = c_1 = \frac{1}{4}$ noterar vi nu att $c_2 = c_1^2 + c = c^2 + c = f(c)$. På samma sätt ser vi att $c_3 = c_2^2 + c = f(c_2) = f(f(c)) = f^2(c)$, och i allmänhet att $c_{n+1} = f^n(c)$. Eftersom

$$0 \leq c \leq \frac{1}{2}$$

gäller från ovan att

$$0 \leq f(c) \leq \frac{1}{2}.$$

Av samma anledning gäller att $0 \leq f^2(c) \leq \frac{1}{2}$, och i allmänhet att

$$0 \leq f^n(c) \leq \frac{1}{2}$$

för alla $n \geq 1$. Eftersom $c_{n+1} = f^n(c)$ gäller alltså att följderna (c_n) är begränsad, så $c = \frac{1}{4}$ tillhör Mandelbrotmängden.

A Träning i bevisföring

Då man i gymnasiet inte är van vid att göra bevis och liknande övningar som de vi ger i detta kompendium så har vi lagt med detta avsnitt som en träning i hur man kan tänka.

En av de viktigaste lärdomarna man ska ta med sig härifrån är att när man ställs inför ett problem så är den första frågan man ska ställa sig:

”Vad är definitionerna av objekten som ingår i frågan?”

Om man till exempel ska visa att en talföljd konvergerar (se Kapitel 2) så borde man alltid börja med att slå upp definitionerna för *talföljder* och *konvergens* om man inte lärt sig dessa utantill. Använder man inte den exakta definitionen för konvergens av en talföljd så kan man inte lösa en sådan uppgift korrekt.

Nedan ger vi några mer specifika tips på olika bevismetoder.

A.1 Tekniker i mängdlära

Ska man visa någonting om mängder är följande tips användbara. Här är A och B godtyckliga mängder, och x ett godtyckligt element.

- (i) Visa att $x \in A$.

Här ska man alltså visa att x uppfyller de villkor som definierar vilka element som tillhör mängden A . Om exempelvis $A = \{1, 2, 3\}$ är det uppenbart att $2 \in A$, men om $A = \{x \mid \text{villkor på } x\}$ så måste man visa att x uppfyller de nämnda villkoren. Om $A = B \cap C$ så måste man visa att $x \in B$ och $x \in C$, medan om $A = B \cup C$ så räcker det att visa att $x \in B$ eller $x \in C$ (eller båda).

- (ii) Visa att $A \subseteq B$.

Tag ett godtyckligt element $x \in A$. Använd nu definitionen för mängden A för att skriva ner vilka villkor som finns på x . Visa sedan att detta medför att $x \in B$. Eftersom x var godtyckligt så betyder detta att alla element i A även ligger i B , det vill säga att $A \subseteq B$.

- (iii) Visa att $A = B$.

Visa först att $A \subseteq B$ och sedan att $B \subseteq A$. Då har vi visat att alla element i A ligger i B och att alla element i B ligger i A . Det måste betyda att $A = B$.

- (iv) Visa att $A = \emptyset$.

Minns att $\emptyset$ betecknar den tomma mängden, det vill säga en mängd som inte innehåller några element alls. Det som ska visas är alltså att det inte kan finnas några element i A .

Antag till att börja med att $x \in A$. Använd definitionen av A för att skriva ner vilka villkor som då ställs på x . Visa att dessa villkor är omöjliga (att de leder till en motsägelse). Alltså kan det inte vara så att $x \in A$, oavsett vilket x vi väljer, så A innehåller inga element.

Exempel A.1.1. Låt A vara en mängd och låt B vara en delmängd av en annan mängd C . Visa att $A \cap B \subseteq C$.

Lösning. Vi vill här visa att en mängd är en delmängd av en annan mängd så vi använder tips (ii) ovan. Tag ett godtyckligt $x \in A \cap B$. Definitionen av snitt av mängder (Definition 1.1.5) säger att $A \cap B$ består av de element som ligger i både A och B . Speciellt gäller att alla element i $A \cap B$ ligger i B , så det följer att $x \in B$. Då B är en delmängd av C gäller enligt definitionen för delmängd (Definition 1.1.2) att alla element i B även ligger i C . Speciellt måste då $x \in C$. Alltså, om $x \in A \cap B$ så gäller att $x \in C$. Eftersom x var godtycklig så har vi visat att $A \cap B \subseteq C$. $\square$

Exempel A.1.2. Låt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ och låt $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$. Visa att $A \cap B = \emptyset$.

Lösning. Här använder vi tips (iv). Tag ett $x \in A \cap B$. Definitionen av snittet säger då att $x \in A$ och att $x \in B$. Att $x \in B$ betyder att x uppfyller $x^2 - 1 = 0$ vilket endast är sant om $x = \pm 1$. Eftersom både 1 och -1 är mindre än 3 så kan inte $x \in A$, vilket betyder att x inte ligger i $A \cap B$. Eftersom x var godtycklig följer det att $A \cap B = \emptyset$. $\square$

A.2 Tekniker i logik och bevisföring

Här ger vi tips på tekniker för att visa saker i logik. Vi skriver P och Q för två godtyckliga påståenden.

(i) Visa att $P \implies Q$.

Anta att P är sann. Om vi från detta kan skapa en följd av implikationer som visar att Q är sann så är vi klara.

(ii) Visa att $P \iff Q$.

Här ska vi visa att påståendena P och Q är ekvivalenta. Detta görs genom att visa att både $P \implies Q$ och $Q \implies P$.

(iii) Visa att P är falskt.

En teknik för att visa att ett påstående är falskt är att anta motsatsen och visa att detta skapar en motsägelse. Med andra ord antar vi att påståendet P är sant och visar att detta implicerar ett påstående Q som vi vet är falskt såsom $1 = 0$. Vi kan då dra slutledningen att antagandet att P är sant inte kan stämma så P måste vara falskt.

Exempel A.2.1. Visa att om n är ett jämnt heltal så är $n^2 + 1$ udda.

Lösning. Vi börjar med att fråga oss vad definitionen för udda och jämna tal är. (Författarna: Eftersom vi inte gett någon definition för detta tidigare i kompendiet ger vi en här).

Definition A.2.2. Ett tal $n \in \mathbb{Z}$ är *jämnt* om det finns ett $m \in \mathbb{Z}$ så att $n = 2m$. Vi kallar n *udda* om det finns ett $m \in \mathbb{Z}$ så att $n = 2m + 1$.

Lösning (forts.) Nu när vi vet definitionerna så kan vi börja lösa uppgiften. Vi vill alltså visa påståendet ” n är jämnt” implicerar påståendet ” $n^2 + 1$ är udda”. Detta gör vi genom att använda teknik (i) ovan. Antag att n är jämnt. Då finns per definition ett heltal m så att $n = 2m$. Det följer därmed att $n^2 = 4m^2$ så $n^2 + 1 = 4m^2 + 1 = 2 \cdot (2m^2) + 1$. Eftersom $k = 2m^2$ är ett heltal ser vi att $n^2 = 2k + 1$ med $k \in \mathbb{Z}$. Alltså är $n^2 + 1$ udda om n är jämnt. $\square$

A.3 Tekniker för konvergensbevis

När det gäller att visa saker rörande konvergens av följder så kan det vara bra, innan man börjar med någon form av bevis, att räkna ut några av de första termerna i följden för att få en känsla för om följden konvergerar och i så fall mot vad. När det väl kommer till att visa ett resultat om konvergens så ska man i princip alltid börja med meningen:

”Tag $\varepsilon > 0$.”

Exempel A.3.1. Visa att följden (x_n) definierad av $x_n = \frac{n}{n+1}$ konvergerar mot 1.

Lösning. Vi börjar med att kolla upp definitionen för konvergens (Definition 2.2.4) och ser att vi måste visa att det för varje $\varepsilon > 0$ går att hitta ett $N \geq 1$ så att $|x_n - 1| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.

Tag $\varepsilon > 0$. För varje $n \geq 1$ gäller att

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

För $N \geq 1$ ser vi att $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$ är ekvivalent med $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Vi väljer därför $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ och får att

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

för alla $n \geq N$. Eftersom vi hittade ett N för ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ är vi klara. $\square$

Förslag till vidare läsning

Det kan vara svårt att hitta böcker som matematiskt förklarar fraktaler och som passar att läsa efter detta kompendium – de flesta böckerna har antingen väldigt höga förkunskapskrav eller är mer populärvetenskapligt skrivna. Undantag finns dock, och vi nämner här två exempel som kan ge en trevlig läsning.

Mandelbrots bok *The Fractal Geometry of Nature* är boken som i princip gjorde fraktaler kända. Boken saknar satser och bevis, men går igenom alla möjliga sorters fraktaler med hjälp av många bilder. Schroeders bok *Fractals, Chaos, Power Laws* är mer populärvetenskaplig men har ändå mycket matematiskt innehåll. Den förklarar bland annat hur fraktaler förekommer i biologi, fysik och sannolikhhetsteori.

Är man enbart ute efter att lära sig mer om matematisk analys så kan man titta närmare på följande böcker.

De två böckerna *Analys i en variabel* och *Analys i flera variabler* av Persson och Böiers är standardböcker i analys för förstaårselever på högskolan som används på både KTH och Stockholms universitet. De går igenom begrepp som kontinuitet och deriverbarhet men är mer inriktade på praktiska tillämpningar, och att faktiskt kunna räkna ut saker, än vad detta kompendium är.

Rudins bok *Principles of Mathematical Analysis* är en klassiker i matematisk analys och har använts världen över i mer än 50 år. Den går igenom alla de begrepp som vi tagit upp, såsom konvergens, Cauchyföljder och kontinuitet, men går även igenom mycket annat. Boken har också med ett bevis för att de reella talen är fullständiga – något vi inte hade utrymme med i detta kompendium. Läsaren ska dock vara medveten om det är en avancerad bok vars text är både kort och koncist skriven, och kan därför vara svårläst som en första bok i analys.

- [1] Benoit Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*.
W. H. Freeman and company, 1985
- [2] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i en variabel*.
3:e upplagan. Studentlitteratur AB, 2010
- [3] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i flera variabler*.
3:e upplagan. Studentlitteratur AB, 2005
- [4] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*.
3:e upplagan. McGraw-Hill, 1976
- [5] Manfred R. Schroeder: *Fractals, Chaos, Power Laws*.
Dover Publications Inc., 2009

Böckerna ovan finns att låna på KTH:s huvudbibliotek. Biblioteket är öppet för alla och ligger på Osquars backe 31.

Sakregister

- absolutbelopp, 14
- antagande, 8
- avbildning, 5
- axiom, 8

- bevis, 6
- bild, 33

- Cantormängden, 23
- Cauchyföljd, 44

- delmängd, 3
- disjunkta mängder, 4

- ekvivalent, 7
- element, 3

- fraktal, 1
 - aktiegraf, 30–31
 - Cantormängden, 23
 - dimension, 55
 - Hilbertkurvan, 60
 - Juliamängd, 72
 - Jurassic Park-draken, 51
 - Kochkurvan, 49
 - Kochsnöflingan, 50
 - Mandelbrotmängden, 66
 - Pythagoras träd, 20
 - Sierpinskis pilspetskurva, 50
 - Sierpinskiatriangeln, 19
 - snäckskal, 35
 - Sveriges kust, 55
- funktion, 5
- följd, 15, 16

- geometrisk summa, 21
- gränsfunktion, 43
- gränsvärde, 16

- heltal, 5
- Hilbertkurvan, 60

- implicera, 7

- Juliamängd, 72
 - ifylld, 70
- Jurassic Park-draken, 51

- Koch
 - kurvan, 49
 - snöflingan, 50
- komplexa tal, 64
 - absolutbelopp, 65
 - konjugat, 65
- kontinuitet, 26, 38
- konvergens, 16, 43
- kurva, 38
 - med ändpunkter, 38
 - plantäckande, 57

- likformig
 - Cauchyföljd, 44
 - konvergens, 43
- linjesegment, 26

- Mandelbrotmängden, 66
- mängd, 3
 - delmängd, 3
 - disjunkt, 4
 - snitt, 4
 - union, 4

- naturliga tal, 5
- norm, 36

- om och endast om, 7

- postulat, 8
- Pythagoras träd, 20
- påstående, 6

- rationella tal, 5
- reella tal, 5

- Sierpinski
 - triangeln, 19
 - pilspetskurvan, 50
- slutet intervall, 25
- snitt av mängder, 4

- tal
 - hel-, 5
 - komplext, 64
 - naturligt, 5
 - rationellt, 5

- reellt, 5
- talföljd, 15
 - begränsad, 66
 - komplex, 66
 - periodisk, 67
- talplanet, 33
- triangelolikheten, 15, 37
 - omvända, 63, 73
- union av mängder, 4
- union av linjesegment, 40