



KTH Engineering Sciences

KTH:s Matematiska Cirkel

POLYTOPER

ANDERS LUNDMAN
GUSTAV SÆDÉN STÅHL

Till minne av Dan Laksov

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK, 2014–2015
FINANSIERAT AV MARIANNE OCH MARCUS WALLENBERGS STIFTELSE

Innehåll

1	Grundläggande begrepp och bevisföring	1
1.1	Mängder	1
1.2	Det euklidiska talplanet och dess delmängder	4
1.3	Matematisk bevisföring	6
1.4	Ett bevis	9
2	Polygoner	14
2.1	Definition av polygoner	14
2.2	Picks sats	16
3	Polytooper	26
3.1	En algebraisk struktur på \mathbb{R}^2	26
3.2	Konvexa höljen	28
3.3	Euklidiska rummet och polyedrar	31
3.4	Högredimensionella rum och polytooper	34
4	Genererande funktioner	38
4.1	Ehrhartfunktionen	38
4.2	Genererande funktioner	41
4.3	Fibonaccisekvensen	43
4.4	Ehrhartserien	45
5	Kombinatorik	48
5.1	Grundläggande kombinatorik	48
5.2	Att räkna gitterpunkter	50
5.3	Kombinatorik och formella summor	52
6	Ehrhartserier och koner	56
6.1	Koner	56
6.2	Ehrhartserien och konen över en polyeder	59
6.3	Att räkna samma sak på två olika sätt	61
7	Ehrhartteori	66
7.1	Trianguleringar av polyedrar	66
7.2	Ehrharts sats	69
7.3	Geometrin hos Ehrhartpolynomet	72

Lösningar till udda övningsuppgifter	77
A Några bevis	93
A.1 Konvexa höljen och polygoner	93
A.2 Att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder	95
A.3 Triangulera en polyeder	97
Förslag till vidare läsning	101
Sakregister	102

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som litteratur till KTH:s MATEMATISKA CIRKEL under läsåret 2014–2015 och består av sju kapitel. Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. En bra idé kan vara att försöka läsa varje kapitel själv innan föreläsningen, så att man redan innan vet vad målet med föreläsningen är och vad som kan visa sig vara svårt.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad: övningar kan ha en (\star), två ($\star\star$) eller tre ($\star\star\star$) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna facit längst bak i kompendiet. Syftet med dessa är att eleverna ska kunna lösa dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. Övningar med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas räknestugor på KTH där eleverna kan lösa uppgifter tillsammans, och få hjälp av oss.

Vi vill dock betona att få av uppgifterna är helt enkla. Detta betyder att läsaren inte bör titta i facit efter några få minuter, utan att först prata med kompisar om uppgiften, kanske lägga den åt sidan ett tag och tänka på annat, och sedan försöka lite till. Dessutom innebär det att få av eleverna kommer att kunna klara samtliga uppgifter, så ett krav på att eleven ska ha löst alla uppgifter bör inte ingå i examinationen. Dock rekommenderar vi starkt att alla elever åtminstone tittar på och försöker sig på alla övningar.

De flesta övningar kommer att ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

KTH:s MATEMATISKA CIRKEL finansieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar Roy Skjelnes, Institutionen för Matematik vid KTH, Alan Sola vid University of Cambridge och Katharina Heinrich för givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

KTH:S MATEMATISKA CIRKEL, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier. Lärarna på Cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet eller förslag till annan förkovran inom matematik.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övriga uppgifter om KTH:S MATEMATISKA CIRKEL finns tillgängligt på

<http://www.math.kth.se/cirkel>

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTH:S MATEMATISKA CIRKEL och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Cirkeln förändras varje år med nya lärare och nya ämnen. Hela tiden har det dock funnits en fast punkt i form av Dan Laksov. Som en av grundarna har Dan varit den drivande kraften bakom Cirkeln från dess start fram till ifjol. Han har värnat om kontakten med lärare och bidragit med stor entusiasm och värdefull konstruktiv kritik till samtliga kompendier. Han är saknad.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygssättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Betyg E eller *Godkänd*: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyg C eller *Väl godkänd*: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyg A eller *Mycket väl godkänd*: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyget *B* ges till elever som uppfyllt kraven för betygssteget *C* och en övervägande del av kraven för betygssteget *A*. På samma sätt fås betyget *D* om kraven för *E* är uppfyllda och en övervägande del av kraven för *C*.

Det är också till exempel möjligt att skolorna samarbetar, så att elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, augusti 2014

1 Grundläggande begrepp och bevisföring

I det här kapitlet kommer vi att ge en introduktion till matematisk bevisföring. Innan dess kommer vi dock att introducera lite terminologi. I matematiken använder man ofta *mängder* som ett bekvämt språk för att beskriva saker och ting, och detta kommer vi också att göra i detta kompendium. Vi börjar därför med att beskriva denna teori.

1.1 Mängder

Låt oss titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En *mängd* är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för *element* i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Ett sådant exempel är

$$A = \{1, 3, a, 7\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a$ och 7 . Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

En mängd kan också ha oändligt många element, och då går det inte att skriva ned alla element. Ett exempel på en oändlig mängd är

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

De tre punkterna betyder här att *alla* positiva heltal ingår i mängden.

Exempel 1.1.1. Mängden som består av alla udda heltal mellan 0 och 10 kan skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad \blacktriangle$$

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x *tillhör* A . Exempelvis gäller $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett objekt x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den *tomma mängden* innehåller inga element och betecknas \emptyset .

Definition 1.1.2. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en *delmängd* till B . Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.1.3. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. \blacktriangle

Ett användbart sätt att beskriva en mängd är som en delmängd av en annan mängd. Det finns ett speciellt skrivsätt för detta, nämligen

$$\{x \in D \mid \text{villkor på } x\}.$$

Med detta menar man delmängden bestående av de element i mängden D som uppfyller de givna villkoren. Strecket $|$ utläses ”så att”. Som exempel kan vi definiera

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} \mid n \text{ är udda,}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} \mid y > 2\}.$$

Mängden B är delmängden av de positiva heltalen som består av alla udda positiva heltal, medan C är delmängden av $\{1, 2, 3, 4\}$ bestående av element större än 2. Alltså har vi

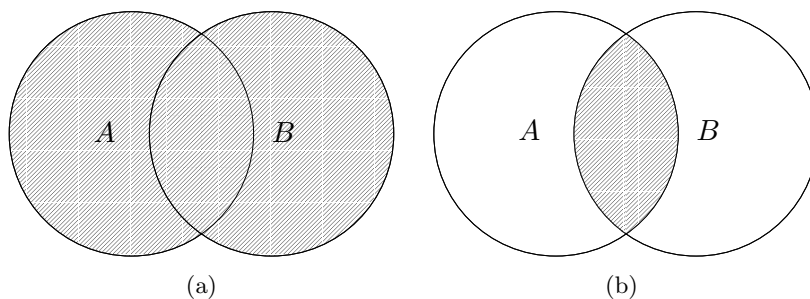
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.1.4. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A \mid x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A \mid x < 3\} = \emptyset$. Vidare har vi att $4 \in A$ men $4 \notin B$. ▲

Definition 1.1.5. Antag att A och B är mängder. *Unionen* av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. *Snittet* av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$. *Differensen* av A och B består av alla element som ligger i A men inte ligger i B , och betecknas $A \setminus B$. Mängderna A och B kallas för *disjunkta* om $A \cap B = \emptyset$.

Exempel 1.1.6. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 8, 3, 4711\}$ och $C = \{2, 4, 7, 8\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \cap C = \{8\}$ och mängderna A och C är disjunkta. Dessutom gäller att $A \setminus B = \{1, 6\}$ och $B \setminus A = \{8, 4711\}$. Till skillnad från unionen och snittet är differensen av två mängder inte symmetrisk i A och B . ▲

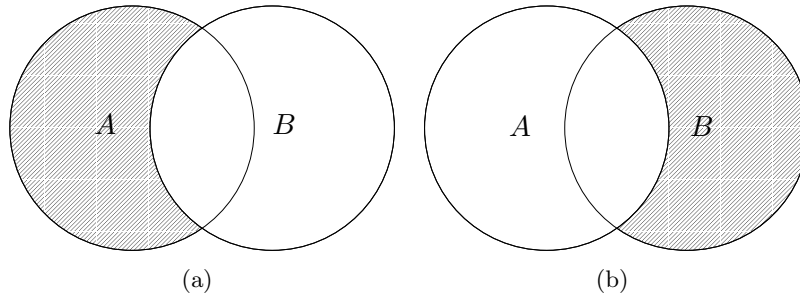
Ett användbart sätt att åskådliggöra union, snitt och differens är med hjälp av så kallade *Venn-diagram*, som visas i Figur 1.1 och Figur 1.2.



Figur 1.1: Venn-diagram som åskådliggör mängderna (a) $A \cup B$ och (b) $A \cap B$.

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de *naturliga talen* $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Denna mängd betecknas \mathbb{N} . Tar vi med negativa tal får vi heltalen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$



Figur 1.2: Venndiagram som åskådliggör (a) $A \setminus B$ och (b) $B \setminus A$.

Beteckningen kommer från tyskans *Zahl* som betyder tal. Mängden av alla kvoter av två heltal $\frac{p}{q}$ där $q \neq 0$ innehåller till exempel $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{243}$ och $\frac{25}{1}$. Vi kallar mängden de *rationella talen* och betecknar den med \mathbb{Q} . Slutligen betecknar vi med \mathbb{R} de *reella talen*, det vill säga alla tal på tallinjen, exempelvis 0 , -1 , $\frac{3}{2}$, $-\frac{527}{3}$, $\sqrt{2}$ och π . Notera att

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Exempel 1.1.7. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$. ▲

Exempel 1.1.8. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2 \cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. ▲

Exempel 1.1.9. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A . ▲

Med hjälp av mängdbegreppet kan vi införa användbar notation.

Exempel 1.1.10. Låt A vara en mängd av tal. Då använder vi summasymbolen \sum för att på ett kortfattat sätt skriva summan av dessa. Om vi till exempel låter $A = \{0, 3, 5, -1\}$ har vi att

$$\sum_{n \in A} n = 0 + 3 + 5 + (-1) = 7.$$

Vi kan även använda notationen för mer komplicerade saker så som att ta summan av kvadraten av varje element genom

$$\sum_{n \in A} n^2 = 0^2 + 3^2 + 5^2 + (-1)^2 = 35.$$

Om $A = \{0, 1, 2, \dots, k\}$ för något positivt heltal k så skriver vi även

$$\sum_{n=0}^k n = \sum_{n \in A} n = 0 + 1 + 2 + \dots + k. \quad \blacktriangle$$

1.2 Det euklidiska talplanet och dess delmängder

I det här avsnittet kommer vi studera mängder av ordnade talpar och några egenskaper hos sådana mängder.

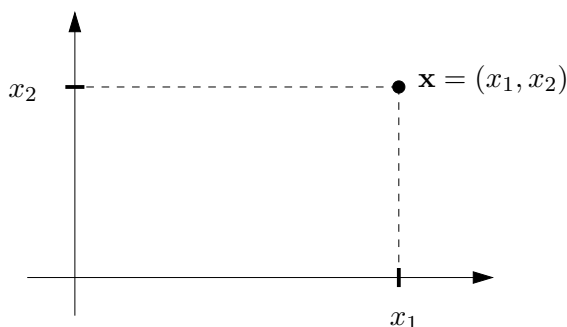
Definition 1.2.1. Det *euklidiska planet*, eller *talplanet*, är mängden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

som består av alla par (x_1, x_2) av reella tal x_1 och x_2 . Vi använder notationen \mathbf{x} för elementet (x_1, x_2) och tolkar x_1 och x_2 som koordinater för punkten \mathbf{x} . Speciellt använder vi notationen $\mathbf{0}$ för punkten $(0, 0)$ som kallas för *origo*.

Notation 1.2.2. När vi skriver för hand, till exempel på föreläsningen, drar vi ofta ett streck ovanför bokstaven istället för att använda fetstil så att till exempel \mathbf{x} betecknas med \bar{x} .

Det euklidiska planet är en mängd med många geometriska egenskaper. En sådan egenskap är att vi kan illustrera \mathbb{R}^2 med hjälp av ett koordinatsystem.

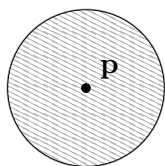


Koordinaterna för varje punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kan i bilden avläsas från koordinataxlarna. Därför kallar vi koordinataxlarna för x_1 -axeln respektive x_2 -axeln.

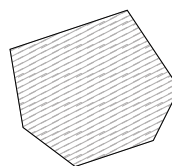
Exempel 1.2.3. I det här avsnittet kommer vi intressera oss för delmängder av \mathbb{R}^2 . Några exempel på delmängder i \mathbb{R}^2 ges nedan.



Figur 1.3: Linjesegmentet från \mathbf{x} till \mathbf{y} .



Figur 1.4: En cirkelskiva med mittpunkt \mathbf{p} .



Figur 1.5: En månghörning.

Med en cirkelskiva med mittpunkt \mathbf{p} menar vi här mängden av alla punkter med avstånd som mest r från \mathbf{p} för något tal $r > 0$. Vi kallar r för radien av cirkelskivan. Linjesegment och cirkelskivor kommer vi ofta använda framöver och månghörningar kommer vi speciellt studera i Kapitel 2. ▲

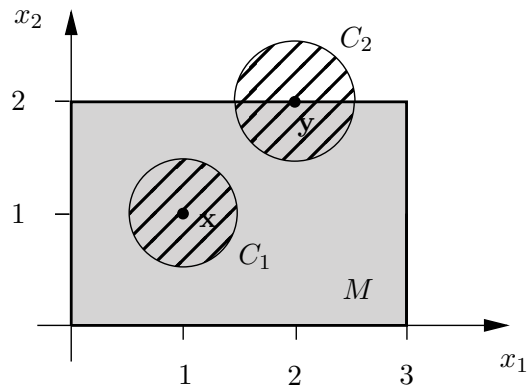
Definition 1.2.4. Låt M vara en delmängd av \mathbb{R}^2 .

- (i) En punkt $\mathbf{x} \in M$ kallas för en *inre punkt* om det existerar en cirkelskiva C med \mathbf{x} som mittpunkt så att C ligger helt inuti M , det vill säga att $C \subseteq M$. Vi kallar mängden av alla inre punkter för det *inre* av M .
- (ii) En punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ kallas för en *randpunkt* till M om varje cirkelskiva C med \mathbf{x} som mittpunkt har egenskapen att C innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M , det vill säga att $C \cap M \neq \emptyset$ och $C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$. Vi kallar mängden av alla randpunkter för *randen* av M .

Exempel 1.2.5. Låt M vara mängden

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 3 \text{ och } 0 \leq x_2 \leq 2\}$$

och låt $\mathbf{x} = (1, 1)$ och $\mathbf{y} = (2, 2)$ vara två punkter i M .

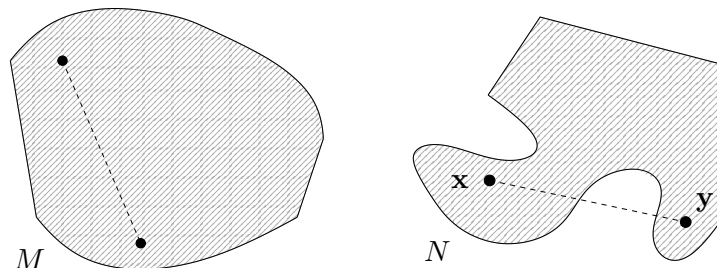


Eftersom cirkelskivan C_1 med \mathbf{x} som mittpunkt ligger helt inuti M så är \mathbf{x} en inre punkt till M . Samtidigt ser vi att cirkelskivan C_2 runt \mathbf{y} innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M . Då vi ser att varje cirkelskiva med \mathbf{y} som mittpunkt kommer ha denna egenskap så följer det att \mathbf{y} är en randpunkt till M . ▲

Anmärkning 1.2.6. I Övning 1.7 visas att varje element i en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ måste vara en inre punkt eller en randpunkt.

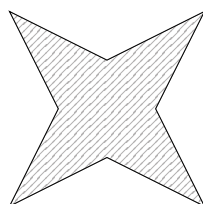
Definition 1.2.7. En delmängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ är *konvex* om det för varje par av punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ gäller att alla punkter på linjesegmentet mellan \mathbf{x} och \mathbf{y} ligger i M .

Exempel 1.2.8. Här ser vi två mängder M och N .



Eftersom linjesegmentet mellan varje val av två punkter i M också ligger i mängden så är M konvex. Däremot är N inte konvex eftersom N innehåller punkterna \mathbf{x} och \mathbf{y} men inte alla punkter på linjesegmentet mellan dem. ▲

Exempel 1.2.9. Linjesegmentet, cirkelskivan och månghörningen från Exempel 1.2.3 är alla konvexa. Man kan till och med övertyga sig om att varje linjesegment och cirkelskiva är konvex. Det finns dock exempel på månghörningar som *inte* är konvexa, såsom följande figur.



▲

1.3 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om *bevis* av matematiska påståenden; varje föreläsning kommer att innehålla flera bevis, och majoriteten av övningsuppgifterna går ut på att bevisa någonting. Detta innebär antagligen en omställning från tidigare kurser i matematik. Så vad är då ett bevis egentligen? Här är en möjlig definition.

Definition 1.3.1. Ett *bevis* av ett *påstående* är en *logisk slutledning* som leder från en överenskommen uppsättning av *antaganden* fram till påståendet.

Det förekommer flera viktiga ord i föregående definition. Låt oss diskutera dem ett i taget.

Definition 1.3.2. Ett *påstående* är en logisk utsaga som antingen är sann eller falsk.

Exempel 1.3.3. Här är några exempel på påståenden:

- (i) $2A + 5B > -C^2$.
- (ii) $X \subseteq (Y \cap Z)$.
- (iii) Alla jämna tal är delbara med 2.
- (iv) Alla jämna tal är delbara med 3.

Av dessa vet vi inte om de första två är falska eller sanna, eftersom vi inte vet vad A, B, C respektive X, Y, Z betyder. Det tredje påståendet är sant eftersom varje jämnt tal kan skrivas som $2n$ för något heltal n . Påstående (iv) är dock falskt: ett motexempel ges av det jämna talet 2 som ej är delbart med 3. ▲

Exempel 1.3.4. Här är också några exempel på saker som *inte* är påståenden.

(i) $x^2 + 6x + 5$

(ii) Mängden av alla jämna tal. ▲

Påståenden kan kombineras på många olika sätt, som påminner om de sätt vi kan skapa nya mängder av gamla genom operationerna \cap , \cup och \setminus . Till exempel kan vi sätta två påståenden bredvid varandra och skriva ordet ”och” emellan, och vi får ett nytt påstående. Ett annat ord man kan sätta mellan två påståenden är ”eller”. En annan sak man kan göra är att skriva ”Det är inte sant att...” före ett påstående, och detta ger också ett nytt påstående.

Men viktigast av alla sätt att skapa nya påståenden ur gamla är kanske följande.

Definition 1.3.5. Låt P och Q vara två påståenden, till exempel några av de som stod i vår lista. Med $P \implies Q$ menar vi följande påstående: ”om påståendet P är sant, är även påståendet Q sant.” I ord säger vi att P *implikerar* Q eller att P *medför* Q . Om $P \implies Q$ och $Q \implies P$ så skriver vi att $P \iff Q$. I ord säger vi att P gäller *om och endast om* Q gäller, alternativt att P och Q är *ekvivalenta*.

För varje par av påståenden P och Q får vi alltså ett nytt påstående, $P \implies Q$. Sanningshalten av $P \implies Q$ kan utläsas ur Tabell 1.

P	Q	$P \implies Q$
sant	sant	sant
sant	falskt	falskt
falskt	sant	sant
falskt	falskt	sant

Tabell 1: Hur $P \implies Q$ beror på P och Q .

Ur Tabell 1 ses speciellt att $P \implies Q$ alltid är sant om P är falskt. Detta kan verka ointuitivt till en början. Ett motiverande exempel för denna princip kan vara följande mening som man kan få höra på en biograf: ”Om du har en mobiltelefon med dig, är den avstängd?” Om man inte har sin mobiltelefon med sig skall man alltid svara ”Ja”, oavsett om man har stängt av den eller inte.

Exempel 1.3.6. Det gäller att

$$5a + b = 0 \implies 5a = -b.$$

Här gäller även den omvända implikationen, så vi hade kunnat skriva \iff i stället för \implies . Vi har också att

$$5a = -b \implies 5ac = -bc,$$

men här är omvändningen inte nödvändigtvis sann. För att gå från det vänstra påståendet till det högra måste vi nämligen dela med c , vilket vi inte vet är tillåtet om vi inte vet att $c \neq 0$. Vi har dock att

$$5ac = -bc \text{ och } c \neq 0 \implies 5a = -b. \quad \blacktriangle$$

Exempel 1.3.7. Påståendet

$$\pi > e \implies (\text{Alla jämna tal är delbara med } 3)$$

är falskt, eftersom det första påstående är sant medan det andra är falskt. Dock är påståendet

$$(\text{Alla jämna tal är delbara med } 3) \implies \pi > e$$

lustigt nog sant enligt vår definition av \implies . \blacktriangle

Exempel 1.3.8. För varje påstående P gäller att påståendet $P \implies P$ är sant, oavsett om P är sant eller inte. \blacktriangle

Definition 1.3.9. En *logisk slutledning* är en sekvens av påståenden

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

med egenskapen att påståendet $P_i \implies P_{i+1}$ är sant för alla i .

Definition 1.3.10. Ett *antagande* är ett påstående som vi förutsätter är sant. Ibland kallas dessa synonymt för *axiom* eller *postulat*.

Vi vet nu alltså vad ett bevis av ett påstående Q är: det är en kedja av mindre, enklare påståenden som låter oss dra slutsatsen att Q är sant, endast utgående ifrån en mindre uppsättning antaganden som vi i förväg har bestämt oss för att starta med.

Exempel 1.3.11. *Antag* att $\frac{3x}{2} = 6$ och att vi vill visa att $x = 4$. Låt påstående P_1 vara ” $\frac{3x}{2} = 6$ ”, P_2 vara ” $3x = 12$ ” och P_3 vara ” $x = 4$ ”. Då gäller att påståendet $P_1 \implies P_2$ är sant eftersom vi kan gå från den första likheten till den andra genom att multiplicera båda leden med 2. På samma sätt har vi att påståendet $P_2 \implies P_3$ är sant eftersom vi kan gå från P_2 till P_3 genom att dividera med 3. Därmed har vi skapat en logisk slutledning som visar att *om vi antar att P_1 är sant så är även P_3 sant.* \blacktriangle

När vi skriver ett bevis brukar vi dock inte bara skriva en lång följd av påståenden med \implies mellan – i stället brukar man försöka uttrycka beviset i vanliga ord och meningar. Symbolen \implies byts till exempel ut mot konstruktioner som ”vilket innebär att...” eller ”eftersom... så...” eller ”från vilket vi drar slutsatsen att...”, och så vidare.

Speciellt värt att nämna är begreppet *motsägelsebevis*. Detta är en speciell beviseteknik där man i stället för att visa att ett påstående P är sant, så bevisar man att det *inte kan vara falskt*. Med detta menar vi att man börjar med antagandet att P inte gäller, och försöker att härleda ett påstående som man vet inte stämmer, till exempel att $0 = 1$. Enligt Tabell 1 så kan bara ett falskt påstående implicera ett falskt påstående, så vårt antagande att P inte gällde måste ha varit falskt.

I detta kompendium kommer vi att förutsätta att läsaren känner till följande:

- (i) De olika sorternas tal: heltal, rationella, reella.
- (ii) Operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, och deras grundläggande räkneregler, såsom att $a+b = b+a$ eller att $0 \cdot a = 0$ för alla a .
- (iii) Grundläggande geometriska egenskaper, såsom att vinkeln av ett helt varv är 360° .

I så stor utsträckning vi bara kan kommer vi att försöka påpeka om vi i ett bevis använder oss av ett antagande som inte står med på denna lista. Det här är inte så lätt som det låter: ofta smyger det sig in ett antagande i ett bevis man inte har tänkt på att man använder, eller så tar man något för givet som egentligen inte är uppenbart.

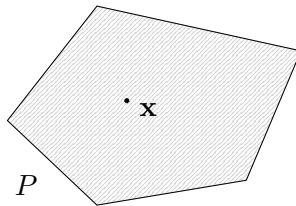
Vår lista på antaganden är inte så precist formulerad: vi skriver bara ”grundläggande räkneregler”, men räknar inte upp alla dessa. Vi ber om läsarens overseende.

1.4 Ett bevis

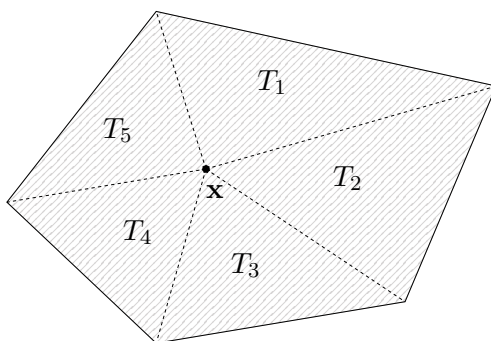
För att inte denna första föreläsning endast skall bli till torrsim kommer vi nu att bevisa ett påstående. Ett välkänt faktum om trianglar är att summan av vinklarna i dess hörn är precis 180° . Eftersom en triangel är en månghörning med tre stycken hörn så kan vi se att detta enbart är ett specialfall av en mer generell sats.

Sats 1.4.1. *Vinkelsumman hos en konvex månghörning i \mathbb{R}^2 är $180^\circ \cdot (n - 2)$ där n är antalet hörn i månghörningen.*

Bevis. Tag en konvex månghörning P med n stycken hörn och låt \mathbf{x} vara en punkt i det inre av P . För att förklara tekniken vi tänker använda så tar vi följande exempel:



Eftersom P är konvex enligt antagandet så innehåller P alla linjesegment från \mathbf{x} till alla hörn i P . Vi ritar ut dessa linjesegment i vårt exempel.

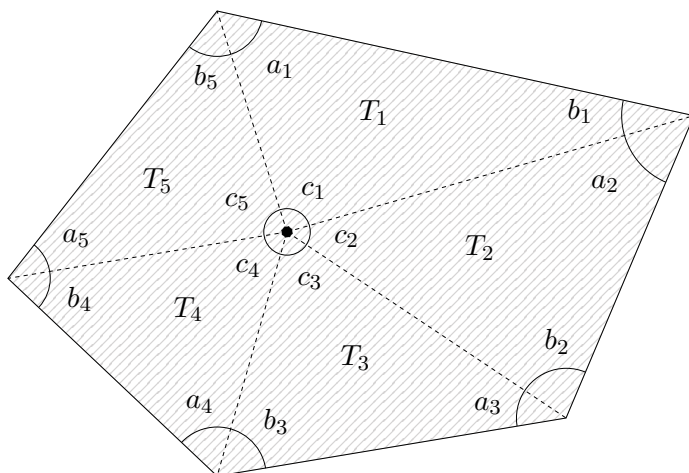


Då linjesegmenten enbart skär varandra i punkten \mathbf{x} så erhåller vi en indelning av P i m stycken trianglar T_1, T_2, \dots, T_m där m är antalet kanter i P . Här använder vi ordet kant för att beskriva ett linjesegment på randen till P .

Eftersom varje kant i P ligger mellan precis två hörn och genom varje hörn i P går precis två kanter så följer det att P har lika många kanter som hörn. Därmed är $n = m$ och vi har därför en indelning av P i n stycken trianglar T_1, T_2, \dots, T_n .

Notera att \mathbf{x} är ett hörn i samtliga trianglar och att övriga hörn i T_i också är hörn i P för alla $i = 1, 2, \dots, n$.

Låt a_i, b_i och c_i vara vinklarna i triangeln T_i , där c_i är vinkeln vid hörnet \mathbf{x} .



Från vår konstruktion ser vi att summan

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

är lika med vinkelsumman av månghörningen P . Vi har också att

$$\sum_{i=1}^n c_i = c_1 + c_2 + \dots + c_n = 360^\circ$$

eftersom vinklarna c_1, c_2, \dots, c_n tillsammans utgör ett helt varv. Vidare är vinkelsumman av en triangel lika med 180° så $a_i + b_i + c_i = 180^\circ$ för alla

$i = 1, 2, \dots, n$. Vi kan nu beräkna vinkelsumman $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ hos P genom att använda ett trick som kallas för att "addera med noll". För varje $i = 1, 2, \dots, n$ har vi att

$$a_i + b_i = a_i + b_i + 0 = a_i + b_i + (c_i - c_i) = (a_i + b_i + c_i) - c_i.$$

Det följer därför att

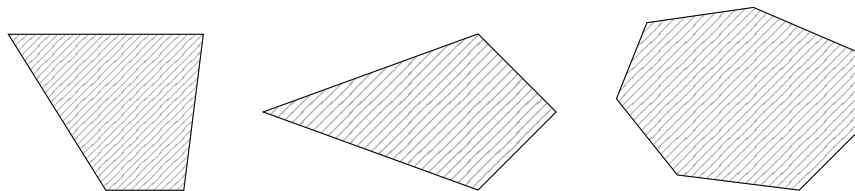
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^n ((a_i + b_i + c_i) - c_i) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i) - \sum_{i=1}^n c_i = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n 180^\circ \right) - 360^\circ = 180^\circ \cdot n - 360^\circ. \end{aligned}$$

Därmed har vi att vinkelsumman hos P är $180^\circ \cdot n - 360^\circ = 180^\circ \cdot (n - 2)$. \square

Anmärkning 1.4.2. Det finns två saker man kan anmärka på i beviset ovan. För det första har vi inte gett en ordentlig definition av vad en månghörning är så att visa egenskaper hos dessa görs automatiskt på en ostadig grund. Till exempel kan man fråga sig om månghörningar alltid har en inre punkt \mathbf{x} . Vi ger dock en ordentlig definition av vad en konvex månghörning, eller *polygon*, är i Definition 2.1.1. Läsaren uppmuntras efter att ha läst denna definition att återvända hit och försäkra sig om att beviset faktiskt håller. För det andra så använder vi att vinkelsumman av en triangel är 180° vilket vi inte bevisat. Trots att vi hävdar att detta är ett känt faktum så måste vi för att vara helt säkra antingen referera till en text där detta bevisas eller skriva ner ett eget bevis vilket vi lämnar som Övning 1.9.

För att förstå innebörden av satsen vi just visat så avslutar vi detta kapitel med ett exempel.

Exempel 1.4.3. Låt oss betrakta följande tre månghörningar



Enligt Sats 1.4.1 är vinkelsumman av både den vänstra och den mittersta månghörningen lika med $180^\circ \cdot (4 - 2) = 360^\circ$ eftersom de båda har fyra hörn. På samma sätt kan vi direkt säga att polygonen till höger har vinkelsumman $180^\circ \cdot (7 - 2) = 900^\circ$ eftersom den har sju hörn. \blacktriangle

Övningar

Övning 1.1 (★). Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $C = \{2, 4, 6, \dots\}$ och $D = \{1, 4, 19, 36, 101\}$. Bestäm

- (i) $B \cup C$,
- (ii) $B \cap C$,
- (iii) $D \cap C$,
- (iv) $\{x \in D \mid x \in B\}$,
- (v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\}$,
- (vi) $\{x + 1 \mid x \in D\}$.

Övning 1.2 (★★). Betrakta mängderna $A = \{1, \{\pi, \star\}, a\}$ och $B = \{a, \star\}$.

- (i) Räkna upp alla element i A .
- (ii) Räkna upp alla delmängder av A .
- (iii) Vad är $A \cup B$ och $A \cap B$?

Övning 1.3 (★★). Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ och låt $B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$. Visa att $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

(Ledning: Tag först $x \in \mathbb{N}$ och visa att $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Tag sedan $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ och visa att $x \in \mathbb{N}$. Använd detta för att visa att mängderna är lika.)

Övning 1.4 (★★★). Låt A och B vara mängder. Vart och ett av följande påståenden är ekvivalent till exakt ett annat. Vilka hör ihop?

- (i) $x \in A$,
- (ii) $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$,
- (iii) $A \subseteq A \cap B$,
- (iv) För alla x gäller: $x \in A \implies x \notin A$,
- (v) $A \cup B = A$,
- (vi) $A = B$,
- (vii) $A = \emptyset$,
- (viii) $A \subseteq B$,
- (ix) $\{x\} \subseteq A$,
- (x) För alla x gäller: $x \in B \implies x \in A$.

Övning 1.5 (★). Avgör vilka av följande utsagor som är påstående enligt vår definition av ett påstående. Vilka av dessa är sanna, vilka är falska, och vilka behöver vi mer information för att avgöra?

- (i) Mängden av de naturliga talen.
- (ii) a är ett positivt heltal.
- (iii) Talet a är jämnt.
- (iv) Varje mängd innehåller minst ett element.
- (v) $a = 5$.
- (vi) $x = a$ är lösningen till ekvationen $3x + 5 = 11$.

Övning 1.6 (★). Använd påståenden från föregående övning och bilda olika sammansatta påståenden på formen $P \implies Q$. Hitta minst två sådana påståenden som är sanna respektive falska.

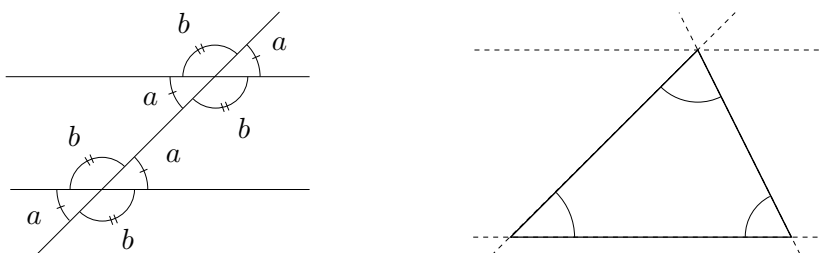
Övning 1.7 (★★). Låt M vara en delmängd av \mathbb{R}^2 och låt $\mathbf{x} \in M$ vara en punkt. Visa att \mathbf{x} är en inre punkt eller en randpunkt till M .

Övning 1.8 (★★). Låt M vara mängden

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 < 3\}.$$

Notera att en av olikheterna i definitionen av M är strikt. Rita mängden M och avgör vilka av punkterna $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 3)$ som ligger i M . Avgör även vilka av dessa som är inre punkter till M och vilka som är punkter på randen till M .

Övning 1.9 (★★). Om två parallella linjer skärs av en tredje linje enligt den vänstra figuren nedan är de markerade vinklarna lika stora. Använd denna egenskap för att visa att summan av vinklarna i en triangel är 180° med hjälp av den högra figuren.



Övning 1.10 (★★). Här betraktar vi den tomma mängden \emptyset .

- (i) Visa att \emptyset är en delmängd av \mathbb{R}^2 .
- (ii) Är \emptyset konvex?

2 Polygoner

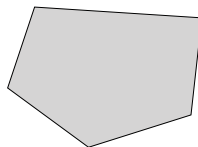
Ordet *polygon* är ett finare ord för månghörning och härstammar från grekiskans *poly* som betyder *flera* och *gon* som betyder *vinke*. Trots själva ordets ursprung har människor intresserat sig för polygoner och geometri betydligt längre tillbaka i tiden än antikens Grekland. Till exempel har man hittat tre till fyra tusen år gamla skrifter från dåtidens Egypten som bland annat beskriver hur arean av en triangel kan beräknas. Än idag används månghörningar flitigt och samma trianglar som egyptierna nedtecknade används nu inom till exempel datorgrafik och naturvetenskap. Även inom matematiken finns det mycket kvar att upptäcka om polygoner och deras högre dimensionella motsvarigheter.

Vi börjar här med att ge en ordentlig definition av vad en polygon är och visar sedan *Picks sats* som är ett uttalande om polygoner som ”bara” är cirka 100 år gammalt.

2.1 Definition av polygoner

Definition 2.1.1. En konvex delmängd P av \mathbb{R}^2 som innehåller sin rand och har ett icke-tomt inre kallas för en (konvex) *polygon* om randen till P består av ändligt många linjesegment som innesluter P .

Exempel 2.1.2. Figuren nedan är en polygon.

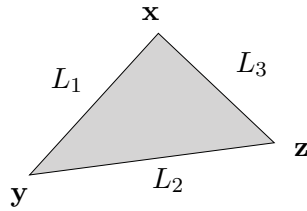


Vi noterar att dess rand består av fem stycken linjesegment som innesluter polygonen och att polygonen har ett icke-tomt inre. ▲

Anmärkning 2.1.3. Anledningen till att vi kräver att en polygon måste ha inre punkter är att vi vill förhindra P från att vara ett linjesegment, en punkt eller tomma mängden. Det finns många som intresserar sig för mer generella typer av månghörningar än polygoner så som vi definierat dem. Till exempel kan man även tillåta icke-konvexa polygoner. För att resultaten i det här kompendiet ska vara giltiga är det dock viktigt att vi använder oss av begreppet polygon enligt Definition 2.1.1.

Definition 2.1.4. Låt P vara en polygon. Ett maximalt linjesegment på randen av P kallas för en *kant* av P . Med maximalt menar vi här att linjesegmentet inte kan förlängas och fortfarande vara en del av randen av P . En punkt som ligger i skärningen av två olika kanter kallas för ett *hörn* av P .

Exempel 2.1.5. Betrakta följande triangel.



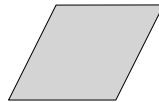
Detta är en polygon där hörnen ges av punkterna \mathbf{x} , \mathbf{y} och \mathbf{z} , och kanterna är linjesegmenten L_1 , L_2 och L_3 . ▲

Exempel 2.1.6. En polygon vars kanter alla har samma längd och vars hörn alla har lika stora vinklar kallas för en *regelbunden* polygon.



Här ser vi exempel på regelbundna polygoner med 3, 4, 5 och 6 hörn. ▲

Exempel 2.1.7. Ett exempel på en polygon vars sidor är lika långa men som *inte* är regelbunden är en romb.



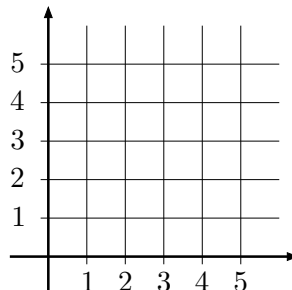
Definition 2.1.8. Mängden

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

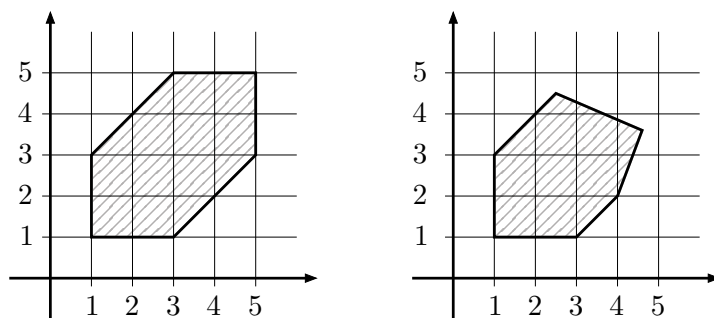
kallas för *gittret* i \mathbb{R}^2 och en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ kallas för en *gitterpunkt*. Med andra ord består gittret \mathbb{Z}^2 av alla punkter i \mathbb{R}^2 med heltalskoordinater. Om alla hörn i en polygon P är gitterpunkter så kallas P för en *gitterpolygon*.

I den här kursen kommer vi mest intressera oss för gitterpolygoner. En motivering för att studera gitterpolygoner, snarare än polygoner rent allmänt, är att gitterpolygoner har flera vackra och spännande egenskaper som generella polygoner saknar. Ett exempel på en sådan egenskap kommer vi se i nästa avsnitt.

Exempel 2.1.9. Man kan illustrera gittret \mathbb{Z}^2 som skärningspunkterna i ett rutnät som i figuren nedan.



Betrakta nu följande polygoner.

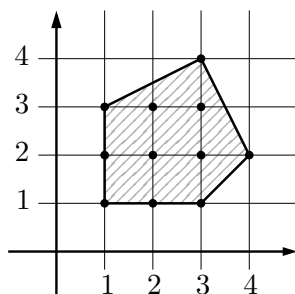


Eftersom alla hörn i den vänstra figuren är gitterpunkter så är polygonen en gitterpolygon. Polygonen till höger har två hörn som inte är gitterpunkter och är därför *inte* en gitterpolygon. ▲

2.2 Picks sats

En speciell egenskap hos gitterpolygoner är att deras area är bestämd av deras gitterpunkter. Detta resultat är känt som Picks sats efter Georg Alexander Pick som bevisade detta år 1899. Notera att mängden av gitterpunkter hos en polygon P är mängden $P \cap \mathbb{Z}^2$. Vi inleder med ett par exempel.

Exempel 2.2.1. Låt oss betrakta följande gitterpolygon.



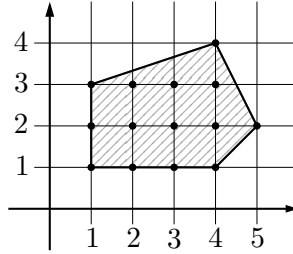
Från Övning 2.1 framgår att arean av polygonen är $\frac{13}{2}$. Samtidigt har polygonen fyra gitterpunkter i sitt inre och sju stycken gitterpunkter på randen. Vad som kan verka som ett mystiskt sammanträffande är att

$$\text{Antal inre gitterpunkter} + \frac{\text{Antal gitterpunkter på randen}}{2} - 1 = 4 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{13}{2},$$

vilket var lika med polygonens area. Picks sats säger att motsvarande samband gäller för alla gitterpolygoner. ▲

Man kan tro att formeln vi just såg är en ren tillfällighet så innan vi går vidare testar vi den i ett annat exempel.

Exempel 2.2.2. Betrakta gitterpolygonen nedan.



Polygonen har sex inre gitterpunkter och åtta gitterpunkter på sin rand. Vi noterar att

$$6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$$

och att detta är precis arean av polygonen, se Övning 2.1. ▲

I exemplen ovan ges alltså arean av en gitterpolygon P av uttrycket

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1$$

där i är antalet inre gitterpunkter och r är antalet gitterpunkter på polygonens rand. Än så länge vet vi bara att denna formel gäller i de två fallen ovan, men man kan faktiskt bevisa att den är sann för alla gitterpolygoner och resultatet kallas för Picks sats. Vi bevisar detta i Sats 2.2.10 men för att genomföra beviset behöver vi lite mer förberedande teori.

Anmärkning 2.2.3. I exemplen ovan och i resten av det här kompendiet använder vi konventionen att enheten för arean hos en gitterpolygon ges av gittret. Konventionen innebär till exempel att kvadraten med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$ har area 1.

Definition 2.2.4. Låt P vara en gitterpolygon och låt $\mathbf{x} \in P$ vara en gitterpunkt. Vi definierar *vikten av \mathbf{x}* , $v_P(\mathbf{x})$ enligt nedan.

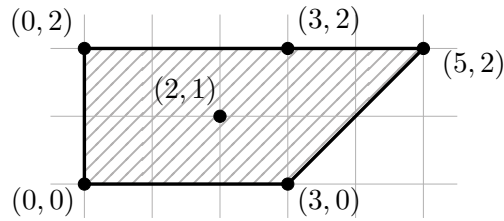
- (i) Om \mathbf{x} är en inre punkt så är $v_P(\mathbf{x}) = 1$.
- (ii) Om \mathbf{x} är en punkt på randen som inte är en hörnpunkt så är $v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$.
- (iii) Om \mathbf{x} är en hörnpunkt så är $v_P(\mathbf{x}) = \frac{\theta}{360^\circ}$ där θ är vinkeln i hörnet \mathbf{x} .

Vi betecknar summan av vikterna av gitterpunkterna i P med $V(P)$, det vill säga att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} v_P(\mathbf{x}).$$

Slutligen definierar vi $v_P(\mathbf{y}) = 0$ för alla gitterpunkter $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ som inte ligger i P .

Exempel 2.2.5. Betrakta polygonen med sex markerade punkter nedan.



Eftersom $(2, 1)$ är en inre punkt så är $v_P((2, 1)) = 1$. Vidare ser vi att $(3, 2)$ är en randpunkt som inte är ett hörn, så $v_P((3, 2)) = \frac{1}{2}$. Punkten $\mathbf{0} = (0, 0)$ är ett hörn med vinkel 90° så $v_P((0, 0)) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$. Att beräkna vikten av de övriga punkterna lämnas till Övning 2.2. ▲

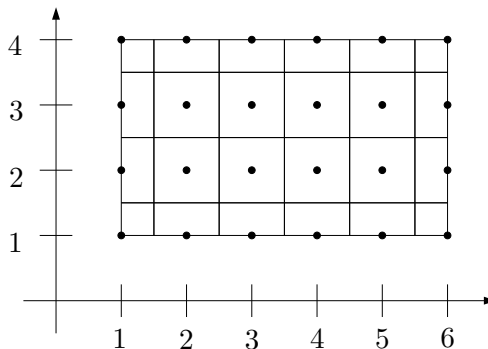
Det kommer visa sig att vikten $V(P)$ av en gitterpolygon P är lika med arean av polygonen. Vi börjar med att visa detta för vissa speciella polygonoer.

Hjälpssats 2.2.6. Låt R vara en rektangel med hörn i gitterpunkter och vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Då är $V(R) = \text{Area}(R)$.

Bevis. Låt $\mathbf{x} \in R$ vara en gitterpunkt. Då är \mathbf{x} antingen ett hörn, en randpunkt som inte är ett hörn eller en inre punkt. I rektanglar gäller att vinklarna i alla hörn är 90° vilket betyder att

$$v_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en inre punkt,} \\ \frac{1}{2} & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en randpunkt som ej är ett hörn,} \\ \frac{1}{4} & \text{om } \mathbf{x} \text{ är en hörnpunkt.} \end{cases}$$

Eftersom sidorna av R är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln kan vi beräkna arean av R genom att dela in R i mindre rektanglar som i följande exempel.



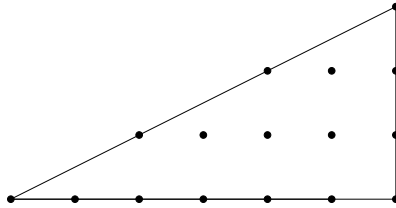
Genom en sådan indelning har vi att varje inre gitterpunkt svarar mot en kvadrat med area 1, vilket är precis vikten av en sådan punkt. På samma sätt svarar en hörnpunkt mot en kvadrat med area $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, vilket är lika med hörnpunktens vikt. En randpunkt som inte är ett hörn svarar mot en rektangel med area $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, vilket också är lika med en sådan punkts vikt.

Hela rektangelns area är lika med summan av areorna av de mindre rektangelarna. Eftersom arean av varje mindre rektangel är lika med vikten av motsvarande gitterpunkt följer att $V(R) = \text{Area}(R)$. □

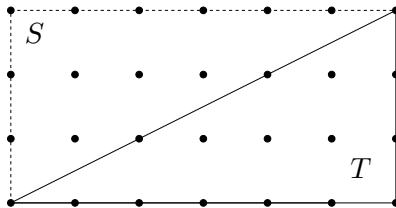
Hjälpsats 2.2.7. Låt T vara en triangel med hörn i gitterpunkter. Då är $V(T) = \text{Area}(T)$.

Bevis. Vi delar upp beviset av detta i två fall.

- (i) Låt oss börja med att visa satsen i fallet då T är en rätvinklig triangel vars kateter är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Exempelvis:



Vi låter nu S vara en kopia av T . Genom att placera denna kopia, roterad ett halvt varv, så att de två trianglarna möts längs sina hypotenusor, kan vi skapa en rektangel R vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln.

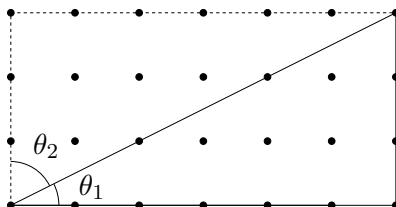


Varje gitterpunkt i T eller S som inte ligger längs med hypotenusan kommer ha samma vikt i R som i den triangel som innehåller den. Detta är sant eftersom om en punkt inte ligger längs med hypotenusan så ligger den i precis en av trianglarna T och S .

Betrakta nu en gitterpunkt \mathbf{x} som ligger längs med hypotenusan av T och S men som inte är ett hörn. Då är \mathbf{x} en inre punkt i rektangeln R och vikten av en sådan är 1. Samtidigt gäller att $v_T(\mathbf{x}) = v_S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ så det följer att

$$v_R(\mathbf{x}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x}).$$

Om \mathbf{x} istället är ett hörn längs med hypotenusan i T så kommer \mathbf{x} samtidigt vara ett hörn längs hypotenusan i S . Låt vinkeln för hörnet \mathbf{x} i T vara θ_1 och vinkeln för hörnet \mathbf{x} i S vara θ_2 .



Eftersom $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, vilket är lika med vinkeln för hörnet \mathbf{x} i rektangeln R , följer det att

$$v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x}) = \frac{\theta_1}{360^\circ} + \frac{\theta_2}{360^\circ} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = v_R(\mathbf{x}).$$

Då vikten av en punkt är 0 om punkten ligger utanför mängden så har vi nu visat att det för alla \mathbf{x} gäller att $v_R(\mathbf{x}) = v_T(\mathbf{x}) + v_S(\mathbf{x})$. Det följer därmed att $V(R) = V(T) + V(S)$. Då S är en kopia av T så är $V(T) = V(S)$ och vi drar slutsatsen att

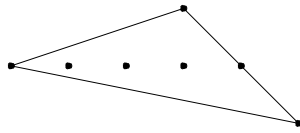
$$V(R) = V(T) + V(S) = 2V(T).$$

Slutligen har vi i Hjälpsats 2.2.6 visat att $V(R) = \text{Area}(R)$ och således måste det gälla att

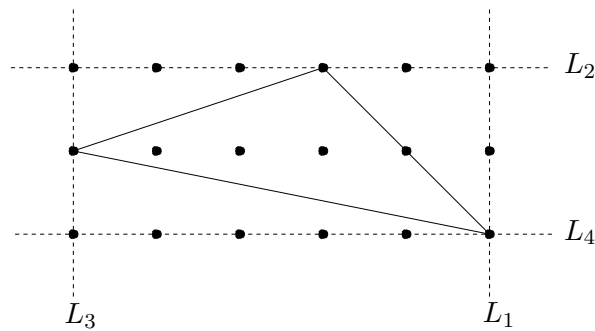
$$V(T) = \frac{1}{2}V(R) = \frac{1}{2}\text{Area}(R) = \text{Area}(T),$$

där vi i sista steget använde att arean av triangeln T är precis hälften av arean av rektangeln R .

- (ii) Låt nu T vara en godtycklig triangel med hörn i gitterpunkter. För att förklara metoden vi kommer använda illustrerar vi tillvägagångssättet med ett exempel:



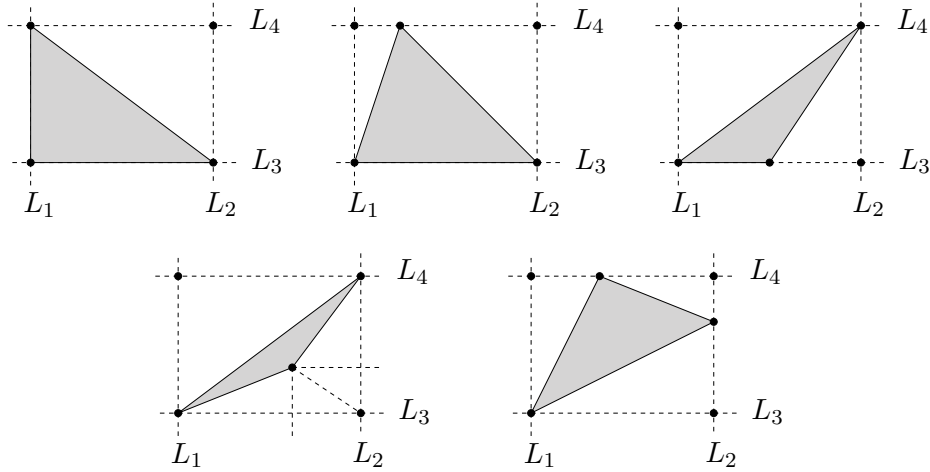
I exemplet kan vi rita horisontella och vertikala linjer som nedan,



som stänger in vår triangel i en rektangel R med gitterpunkter som hörn och vars sidor är parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln. Denna konstruktion kommer även göra att T delar in rektangeln i ett antal bitar som alla har hörn i gitterpunkter. I Övning 2.9 visas att dessa bitar består av rätvinkliga trianglar T_1, T_2, \dots, T_k för något $k \in \mathbb{N}$. Därmed har vi att

$$R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k.$$

Vidare är kateterna i T_i parallella med x_1 -axeln respektive x_2 -axeln för alla $i = 1, 2, \dots, k$. Antalet rätvinkliga trianglar som behövs beror på P . I vårt exempel har vi tre trianglar T_1, T_2 och T_3 . I allmänhet gäller, upp till att rotera figuren, att alla möjliga sådana uppdelningar är av någon av de typer som illustreras nedan (där vi enbart markerat hörnen och inga övriga gitterpunkter).



Enligt samma resonemang som i (i) får vi nu att

$$V(R) = V(T) + V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k),$$

samtidigt som

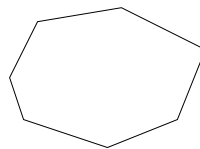
$$\text{Area}(R) = \text{Area}(T) + \text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_2) + \dots + \text{Area}(T_k).$$

Enligt Hjälpsats 2.2.6 är $\text{Area}(R) = V(R)$ för rektangeln R och enligt (i) har vi att $\text{Area}(T_i) = V(T_i)$ för $i = 1, 2, \dots, k$. Därmed drar vi slutsatsen att

$$\begin{aligned} V(T) &= V(R) - V(T_1) - V(T_2) - \dots - V(T_k) = \\ &= \text{Area}(R) - \text{Area}(T_1) - \text{Area}(T_2) - \dots - \text{Area}(T_k) = \\ &= \text{Area}(T). \end{aligned} \quad \square$$

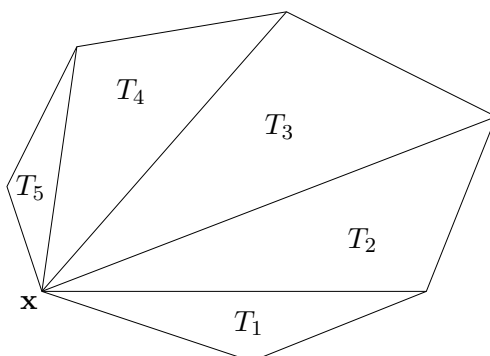
Hjälpsats 2.2.8. Låt P vara en gitterpolygon. Då gäller att $V(P) = \text{Area}(P)$.

Bevis. Tag en godtycklig gitterpolygon P . Vi väljer återigen att illustrera vår bevismetod med ett exempel:



Genom att välja ett hörn x och dra streck från det hörnet till alla andra hörn av polygonen så skapas en så kallad *triangulering* av P . En triangulering är ett

sätt att skriva P som en union av trianglar T_1, T_2, \dots, T_k så att varje icke-tom skärning mellan varje par av olika trianglar T_i och T_j antingen är ett hörn eller en kant i både T_i och T_j .

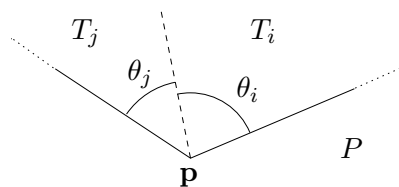


I vårt exempel ser vi till exempel att skärningen av trianglarna T_1 och T_2 är en kant och att skärningen av trianglarna T_1 och T_3 är hörnet \mathbf{x} . En anledning till att vi gjorde detta är för att vi nu kan skriva arean av P som summan av areorna av trianglarna, $\text{Area}(P) = \text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_k)$. Tag nu en punkt $\mathbf{p} \in P$. Vi får då några olika fall att undersöka.

- (i) Om \mathbf{p} är en inre punkt av P så finns två möjligheter. Den ena möjligheten är att \mathbf{p} är en inre punkt i precis en triangel T_i för något $i = 1, 2, \dots, k$. Då gäller att $v_P(\mathbf{p}) = 1 = v_{T_i}(\mathbf{p})$. Den andra möjligheten är att \mathbf{p} ligger på en kant av en triangel T_i och då måste \mathbf{p} också ligga på kanten av precis en annan triangel T_j för något $j \neq i$. Därmed gäller att \mathbf{p} är en randpunkt som inte är ett hörn i både T_i och T_j . Då gäller att $v_{T_i}(\mathbf{p}) = v_{T_j}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}$ så vi har att

$$v_P(\mathbf{p}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = v_{T_i}(\mathbf{p}) + v_{T_j}(\mathbf{p}).$$

- (ii) Om \mathbf{p} är en randpunkt till P som inte är ett hörn så gäller att \mathbf{p} ligger i precis en triangel T_i för något $i = 1, 2, \dots, k$. I så fall gäller det att $v_P(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} = v_{T_i}(\mathbf{p})$.
- (iii) Om \mathbf{p} är ett hörn i P så ser vi från bilden att \mathbf{p} i så fall är ett hörn i antingen en, två, eller alla trianglar. I fallet då \mathbf{p} är ett hörn i precis en triangel T_i så är vikten $v_P(\mathbf{p}) = v_{T_i}(\mathbf{p})$. Om \mathbf{p} är ett hörn i precis två trianglar T_i och T_j så låter vi θ_i vara vinkeln för \mathbf{p} i T_i och θ_j vara vinkeln för \mathbf{p} i T_j .



Då gäller att vinkeln för \mathbf{p} i P är $\theta_i + \theta_j$ så

$$v_P(\mathbf{p}) = \frac{\theta_i + \theta_j}{360^\circ} = \frac{\theta_i}{360^\circ} + \frac{\theta_j}{360^\circ} = v_{T_i}(\mathbf{p}) + v_{T_j}(\mathbf{p}).$$

Det sista fallet är att \mathbf{p} är ett hörn i alla trianglar T_1, \dots, T_k , det vill säga att $\mathbf{p} = \mathbf{x}$. På samma sätt som ovan får vi då att

$$v_P(\mathbf{p}) = v_{T_1}(\mathbf{p}) + \dots + v_{T_k}(\mathbf{p}).$$

Vi har nu visat att $v_P(\mathbf{p}) = v_{T_1}(\mathbf{p}) + \dots + v_{T_k}(\mathbf{p})$ för alla gitterpunkter $\mathbf{p} \in P$. Därmed gäller det att

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k).$$

Enligt Hjälpsats 2.2.7 är $V(T_i) = \text{Area}(T_i)$ för godtyckliga gittertrianglar T_i så det följer att

$$V(P) = V(T_1) + V(T_2) + \dots + V(T_k) = \text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_k) = \text{Area}(P)$$

och därmed har vi att $V(P) = \text{Area}(P)$. □

Vi är nu nära ett bevis av Picks sats. Det sista vi behöver är ett sätt att relatera vikten $V(P)$ av en gitterpolygon P med antalet gitterpunkter i P . Följande resultat ger en direkt koppling mellan antalet hörn av en gitterpolygon och vikten av hörnen.

Hjälpsats 2.2.9. *Låt P vara en gitterpolygon med n stycken hörn. Då gäller att summan av vikterna av hörnen till P är $\frac{n-2}{2}$.*

Bevis. Se Övning 2.3. □

Sats 2.2.10 (Picks sats). *Låt P vara en gitterpolygon med r stycken gitterpunkter längs randen och i stycken gitterpunkter i dess inre. Då gäller att*

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1.$$

Bevis. Låt R vara mängden av gitterpunkter på randen till P , låt I vara mängden av inre gitterpunkter till P och låt n vara antalet hörn till P . Vi börjar med att beräkna vikten $V(P)$.

Genom att införa H att vara mängden av hörnpunkter till P har vi att $R \setminus H$ är mängden av gitterpunkter på randen till P som inte är hörnpunkter. Eftersom varje gitterpunkt till P måste ligga i precis en av de tre mängderna I , $R \setminus H$ och H följer att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} v_P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}).$$

Vidare har vi att varje inre gitterpunkt i P har vikt 1 och det finns precis i stycken sådana, så $\sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) = 1 \cdot i = i$. Varje gitterpunkt \mathbf{x} på randen som inte är ett hörn har vikt $v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$ och det finns precis $r - n$ stycken sådana randpunkter, där r är det totala antalet gitterpunkter på randen av P . Därmed är $\sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(r - n)$. Enligt Hjälpsats 2.2.9 är summan

av vikterna av hörnpunkterna lika med $\frac{n-2}{2}$, så $\sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}) = \frac{n-2}{2}$. Detta ger att

$$V(P) = \sum_{\mathbf{x} \in I} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in R \setminus H} v_P(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{x} \in H} v_P(\mathbf{x}) = i + \frac{1}{2}(r-n) + \frac{n-2}{2} = i + \frac{r}{2} - 1.$$

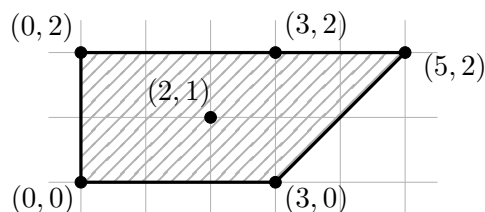
Enligt Hjälpsats 2.2.8 har vi slutligen att $\text{Area}(P) = V(P)$ så det följer att

$$\text{Area}(P) = i + \frac{r}{2} - 1. \quad \square$$

Övningar

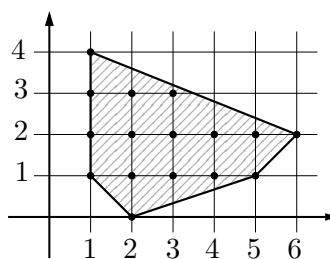
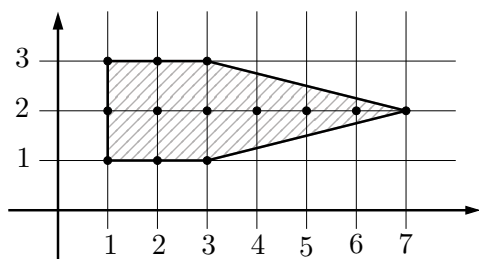
Övning 2.1 (*). Beräkna arean av polygonen i Exempel 2.2.1 genom att dela in den i rektanglar och rätvinkliga trianglar och summera areorna. Beräkna arean av polygonen i Exempel 2.2.2 på samma sätt.

Övning 2.2 (**). Beräkna vikterna av punkterna $(3, 0)$, $(0, 2)$ och $(5, 2)$ i följande polygon tagen från Exempel 2.2.5.

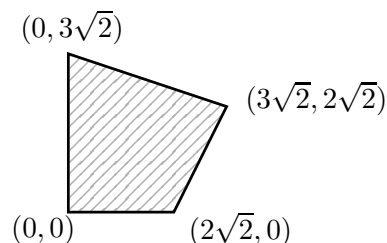


Övning 2.3 (**). Visa att summan av vikterna av hörnen i en polygon P med n stycken hörn är $\frac{n-2}{2}$. (Ledning: Använd Sats 1.4.1)

Övning 2.4 (*). Använd Picks sats för att beräkna areorna av följande polygoner.

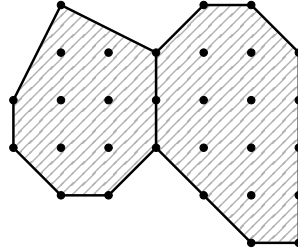


Övning 2.5 (**). Använd Picks sats för att beräkna arean av följande polygon. (Ledning: Alla hörnpunkter är en multipel av $\sqrt{2}$.)



Övning 2.6 (★★). Visa med ett exempel att Picks sats inte gäller för polygoner som inte är gitterpolygoner.

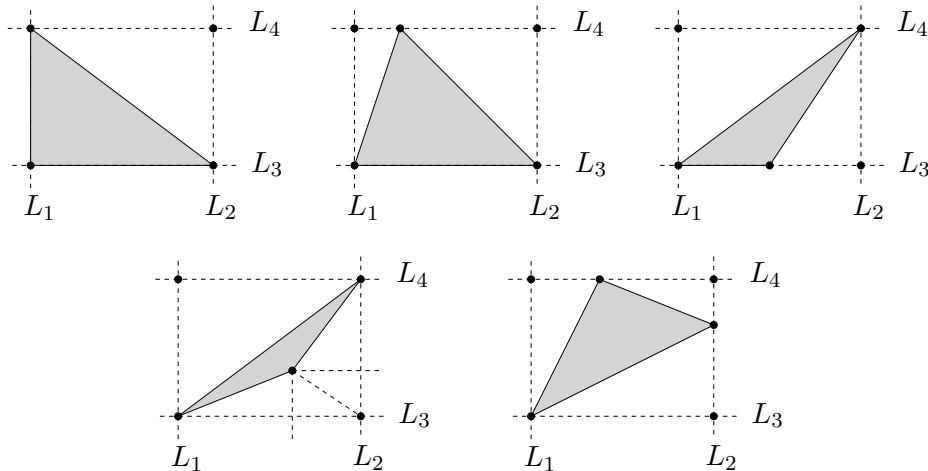
Övning 2.7 (★★★). Visa att Picks sats gäller för *icke*-konvexa månghörningar P som ges av unionen av två allmänna konvexa gitterpolygoner P_1 och P_2 som sätts samman i en kant L som i exempelfiguren nedan.



(*Ledning:* Låt k vara antalet gitterpunkter på L som inte är punkter på randen av P . Hur många inre gitterpunkter har P i termer av k och antalet inre gitterpunkter till P_1 och P_2 ? Vad är antalet gitterpunkter på randen till P i termer av k och antalet gitterpunkter på randen av P_1 och P_2 ?)

Övning 2.8 (★★). En gitterpolygon P har area 5 och har 3 gitterpunkter i sitt inre. Hur många gitterpunkter ligger på randen av P ? Ge två olika förslag på vilken polygon P skulle kunna vara.

Övning 2.9 (★★★). Visa att man till varje gittertriangel P kan lägga till ett antal rätvinkliga gittertriangler T_1, \dots, T_k så att $R = P \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$ är en rektangel med hörn i gitterpunkter.



(*Ledning:* Låt x_1^{min} vara den minsta x_1 -koordinaten av triangelns hörn. Definiera på samma sätt x_2^{min} , x_1^{max} och x_2^{max} . Skapa de vertikala linjerna L_1 och L_2 som går igenom x_1^{min} respektive x_1^{max} . Skapa också de horisontella linjerna L_3 och L_4 som går igenom x_2^{min} respektive x_2^{max} . Låt R vara rektangeln som stängs in av L_1, L_2, L_3 och L_4 . Hur många av hörnen i R kan som minst vara hörn i P ? Dela in beviset i fall beroende på hur många av hörnen i P är hörn i R . Dra slutsatsen att upp till rotation av polygonen så ges alla möjliga typer av uppdelningar av de fem fallen ovan.)

3 Polytooper

Efter att ha studerat polygoner, som är tvådimensionella månghörningar, vill vi nu undersöka månghörningar i högre dimensioner. För att enklare kunna beskriva dessa så börjar vi detta kapitel med att förklara polygoner på ett annat sätt än vad vi gjort tidigare.

Därefter använder vi detta språk för att definiera tredimensionella månghörningar, så kallade *polyedrar*. Precis som med ordet polygon så kommer ordet polyeder från grekiskan och är en sammansättning av ordet *poly* och ordet *hedra* som betyder *basyta*. Detta kan förklaras av att en polyeder är innesluten av ett antal ytor i former av polygoner på samma sätt som en polygon är innesluten av ett antal linjer.

Sedan definierar vi polytooper, vilket är månghörningar i allmänna dimensioner. Ordet polytop uppkom sent på 1800-talet i Tyskland som ett samlingsnamn för månghörningar av godtycklig dimension.

3.1 En algebraisk struktur på \mathbb{R}^2

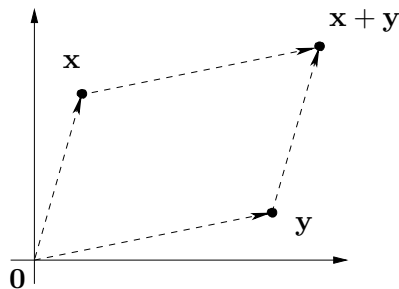
Definition 3.1.1. Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vara två punkter i \mathbb{R}^2 och låt $\lambda \in \mathbb{R}$ vara ett tal. Då definierar vi

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,

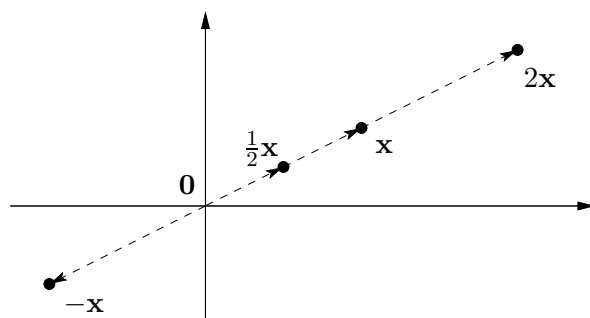
(ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$,

(iii) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$.

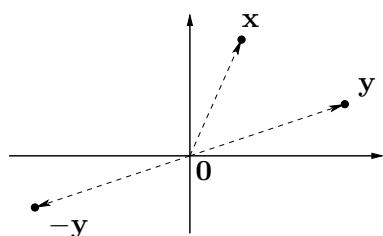
I Kapitel 1 och 2 studerade vi \mathbb{R}^2 *geometriskt*, det vill säga genom att betrakta figurer. Definitionen ovan är istället *algebraisk* men har oavsett en underliggande geometrisk idé. Summan $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ av två punkter \mathbf{x} och \mathbf{y} kan nämligen visualiseras på följande sätt. Vi börjar med att rita pilar från origo till punkterna \mathbf{x} och \mathbf{y} . Sedan parallellförflyttar vi en av pilarna och lägger den så att den startar där den andra pilen slutar. Summan $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ges då av punkten som ligger där den pil som vi flyttade slutar. Vilken av pilarna vi väljer att flytta har ingen betydelse som kan ses i följande bild.



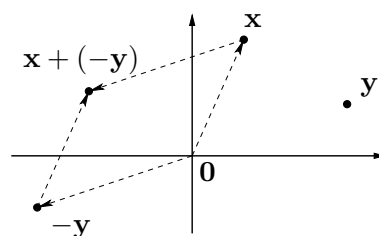
På ett liknande sätt kan vi visualisera hur $\lambda \mathbf{x}$ ser ut geometriskt genom att förlänga pilen från $\mathbf{0}$ till \mathbf{x} med faktorn λ :



Eftersom vi har att $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$ så kan vi också ge en geometrisk tolkning av differensen $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Vi gör detta i flera steg.

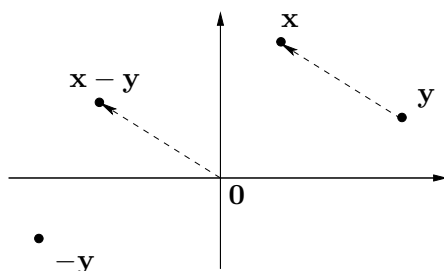


Figur 3.1: Punkterna \mathbf{x} , \mathbf{y} och $-\mathbf{y}$



Figur 3.2: Punkten $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$

Vi noterar att linjesegmentet mellan origo och punkten $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ har samma längd och är parallell med linjesegmentet mellan \mathbf{y} och \mathbf{x} .



Figur 3.3: Linjen från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är parallell med linjen från \mathbf{y} till \mathbf{x}

Anmärkning 3.1.2. Att som i exemplen ovan betrakta en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ som en pil från origo till \mathbf{x} som man kan flytta runt är något man går igenom i teorin om vektorer. Vi vill dock oftast betrakta våra punkter som riktiga punkter och inte pilar så denna teori tas inte upp här.

Exempel 3.1.3. Vi beräknar $3\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ där $\mathbf{x} = (2, 1)$ och $\mathbf{y} = (0, 1)$. Enligt Definition 3.1.1 gäller att

$$3\mathbf{x} = 3(2, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3) \text{ och } 2\mathbf{y} = (0, 2).$$

Därmed fås att

$$3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 3(2, 1) - 2(0, 1) = (6, 3) - (0, 2) = (6 - 0, 3 - 2) = (6, 1). \quad \blacktriangle$$

3.2 Konvexa höljen

Med den algebraiska strukturen vi nu gett \mathbb{R}^2 kan vi konstruera konvexa höljen av ett antal punkter. Detta kommer leda till ett nytt sätt att beskriva polygoner.

Definition 3.2.1. Låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vara ett ändligt antal punkter i \mathbb{R}^2 . Det konvexa höljet av $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ är mängden

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

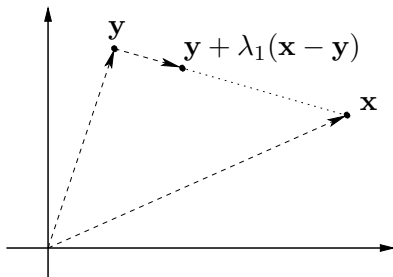
som består av punkter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ som kan skrivas på formen $\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ som uppfyller villkoren ovan.

Definitionen ovan kan se något krånglig ut, men det geometriska objektet som den beskriver är förhållandevis enkelt. Det konvexa höljet av ett antal punkter är nämligen den minsta konvexa mängden som innehåller de givna punkterna och är oftast en polygon. Vi kommer rigoröst formulera vad vi menar med detta i Sats 3.2.4. Låt oss dock inleda med ett exempel.

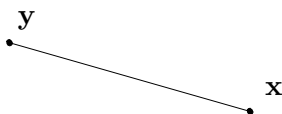
Exempel 3.2.2. Det konvexa höljet av två punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ges av mängden $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ och } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$. Vi har då att $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ så en punkt i det konvexa höljet kan skrivas på formen

$$\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x} + (1 - \lambda_1) \mathbf{y} = \mathbf{y} + \lambda_1 (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

för något $0 \leq \lambda_1 \leq 1$. Eftersom vi noterade att linjesegmentet från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ har samma riktning och längd som linjesegmentet från \mathbf{y} till \mathbf{x} så ligger en punkt på formen $\mathbf{y} + \lambda_1 (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ på linjen mellan \mathbf{x} och \mathbf{y} , som framgår från figuren nedan.



Eftersom λ_1 kan anta alla värden mellan 0 och 1 så är $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mängden av alla punkter som ligger på linjesegmentet mellan \mathbf{x} och \mathbf{y} .



Alltså, det konvexa höljet av två punkter \mathbf{x} och \mathbf{y} är lika med linjesegmentet mellan de två punkterna. ▲

Sats 3.2.3. Låt $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ vara tre punkter som inte ligger på en linje. Då är det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ en triangel med $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och \mathbf{x}_3 som hörn.

Bevis. Varje punkt \mathbf{p} i K är per definition på formen

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Efter omskrivningen $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_3$ skiljer vi på två fall.

Det första fallet är att $\lambda_3 = 1$. Då är $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ eftersom $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \lambda_3 = 0$ och $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Detta betyder i sin tur att $\mathbf{p} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3$.

Det andra fallet är att $\lambda_3 \neq 1$, och vi gör då följande räknetrick:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = (1 - \lambda_3) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_2 \right) = (1 - \lambda_3) \mathbf{y},$$

där vi infört $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} \mathbf{x}_2$. Notera här att det är viktigt att kräva att $\lambda_3 \neq 1$ för annars så skulle vi dividera med 0! Den stora fördelen med den här omskrivningen ses enklast genom att införa $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3}$ och $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3}$. Eftersom $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ och

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{1 - \lambda_3}{1 - \lambda_3} = 1$$

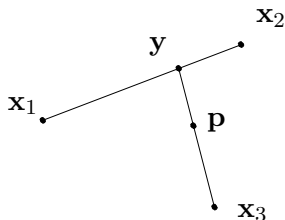
så ser vi att \mathbf{y} ligger i det konvexa höljet av \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 ,

$$\mathbf{y} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 \mid \mu_1, \mu_2 \geq 0 \text{ och } \mu_1 + \mu_2 = 1\}.$$

Det konvexa höljet $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ är som vi noterade i Exempel 3.2.2 lika med linjesegmentet mellan \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 . Eftersom vår ursprungliga punkt \mathbf{p} kan skrivas

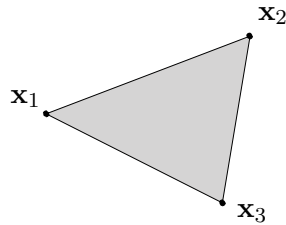
$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = (1 - \lambda_3) \mathbf{y} + \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

har vi på samma sätt att \mathbf{p} tillhör det konvexa höljet $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_3)$, vilket är linjesegmentet mellan \mathbf{y} och \mathbf{x}_3 .



Då $\lambda_3 \neq 1$ innebär detta att vi för varje \mathbf{y} kan, genom att variera λ_3 i intervallet $0 \leq \lambda_3 < 1$, få \mathbf{p} att vara alla punkter på linjesegmentet $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_3)$ utom just punkten \mathbf{x}_3 . Vi vet dock redan att $\mathbf{p} = \mathbf{x}_3$ i fallet $\lambda_3 = 1$. Notera att det är möjligt att variera λ_3 eftersom vi för varje värde av λ_3 kan hitta nya λ_1 och λ_2 mellan 0 och 1 så att kvoterna $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3}$ och $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3}$ hålls konstanta, vilket betyder att punkten \mathbf{y} inte förändras. Därmed får vi att hela linjesegmentet

mellan \mathbf{y} och \mathbf{x}_3 ligger i K . Slutligen konstaterar vi att genom att variera λ_1 och λ_2 mellan 0 och 1 så kan vi få alla punkter på linjesegmentet mellan \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 som \mathbf{y} . Alltså kommer alla linjesegment från \mathbf{x}_3 till alla punkter \mathbf{y} på linjesegmentet mellan \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 ligga i K . Därför drar vi slutsatsen att $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ är triangeln



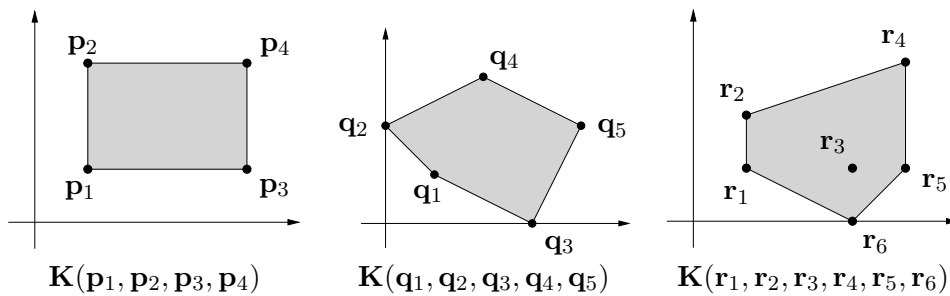
med hörn i punkterna \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 och \mathbf{x}_3 . □

Man kan med en liknande metod visa att det konvexa höljet av fyra punkter som inte ligger på en linje ges av en polygon med som mest fyra hörn. På samma sätt kan man visa att det konvexa höljet av fem punkter som inte ligger på en linje är en polygon med som mest fem hörn. Man kan till och med visa följande sats, vars bevis kräver en del beräkningar och därför har lämnats till Appendix A.1.

Sats 3.2.4. Låt $n \geq 3$ och låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ vara n stycken punkter som inte alla ligger på en linje. Då är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ en polygon med som mest n stycken hörn.

Bevis. Se Sats A.1.2 □

Exempel 3.2.5. Betrakta följande tre exempel på konvexa höljen.



Notera att den högra figuren har en punkt \mathbf{r}_3 som ligger inuti det konvexa höljet. Det betyder att \mathbf{r}_3 ej behövs för att konstruera detta konvexa hölje, utan vi har att $\mathbf{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) = \mathbf{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)$. Se även Övning 3.3. ▲

Anmärkning 3.2.6. Det följer från Sats 3.2.4 att varje polygon P är lika med det konvexa höljet av sina hörn. Det vill säga att om P har hörnen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ så är $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Från Sats 3.2.4 ser vi alltså att vi skulle kunnat definiera en polygon som det konvexa höljet av ett ändligt antal punkter som inte ligger på en linje. Vi valde att använda oss av Definition 2.1.1 eftersom

den på många sätt är enklare att förstå. I resten av kompendiet kommer vi dock inte göra skillnad på en polygon enligt Definition 2.1.1 och en polygon som det konvexa höljet av sina hörn.

3.3 Euklidiska rummet och polyedrar

Än så länge har vi studerat tvådimensionella objekt, så som polygoner och andra delmängder i talplanet. Vi går nu över till att studera tredimensionella objekt. Följande definitioner är direkta motsvarigheter till det tvådimensionella fallet.

Definition 3.3.1. Det *euklidiska rummet* är mängden

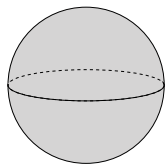
$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Givet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ definierar vi

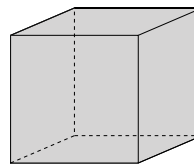
- (i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,
- (ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$,
- (iii) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$.

Vidare låter vi $\mathbb{Z}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$ beteckna *gittret* i \mathbb{R}^3 . Vi inför notationen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ och kallar denna punkt för *origo*.

Exempel 3.3.2. Följande är exempel på delmängder i \mathbb{R}^3 .



Figur 3.4: En boll.



Figur 3.5: En kub.

Med en boll menar vi här mängden av alla punkter som har som mest avstånd r från någon given punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, där vi kallar $r > 0$ för bollens radie och \mathbf{p} för bollens mittpunkt. En kub är det första exemplet vi ser på en tredimensionell månghörning vilket är något vi kommer spendera en stor del av detta kompendium att studera. ▲

Definition 3.3.3. Låt M vara en delmängd av \mathbb{R}^3 .

- (i) En punkt $\mathbf{x} \in M$ kallas för en *inre punkt* om det existerar en boll B med \mathbf{x} som mittpunkt som ligger helt inuti M , det vill säga att $B \subseteq M$. Mängden av alla inre punkter kallas för det *inre* av M .
- (ii) En punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ kallas för en *randpunkt* till M om varje boll B med \mathbf{x} som mittpunkt har egenskapen att B innehåller både punkter som ligger i M och punkter som ligger utanför M , det vill säga att $B \cap M \neq \emptyset$ och $B \cap (\mathbb{R}^3 \setminus M) \neq \emptyset$. Mängden av alla randpunkter till M kallas för *randen* av M .

Definition 3.3.4. Låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vara ett antal punkter i \mathbb{R}^3 . Då definierar vi det konvexa höljet av dessa punkter som mängden

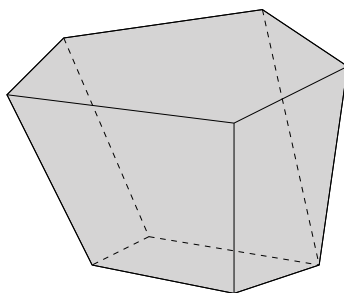
$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}.$$

I analogi med Sats 3.2.4 gör vi följande definition.

Definition 3.3.5. En *polyeder* är ett konvext hölje av ett ändligt antal punkter $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$ med ett icke-tomt inre. Vi definierar *hörnen* av P som den minsta uppsättning punkter $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ så att $P = \mathbf{K}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$. Om alla hörn i P är gitterpunkter så kallas P för en *gitterpolyeder*.

Anmärkning 3.3.6. Den minsta uppsättningen av punkter som bygger upp en polyeder är unik. Det vill säga att om $P = \mathbf{K}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ är en polyeder där k är minimal och om det finns k punkter $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ med $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ så gäller att $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$. Beviset för detta utelämnas och vi ber om läsarens överseende.

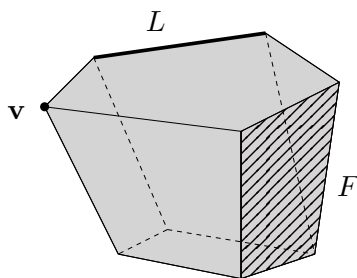
Exempel 3.3.7. Följande figur är en polyeder.



Notera att den är innesluten av flera polygoner som skär varandra i kanter och hörn. ▲

Definition 3.3.8. Låt P vara en polyeder. Randen av P består av ett antal polygoner som vi kallar för *fasetter* av P . Varje kant av någon fasett av P kallas också för en kant av P . Vidare sammanfaller hörnen av P med hörnen av fasetterna. Vi definierar *sida* som samlingsnamnet för tomma mängden, hörn, kanter och fasetter av en polyeder.

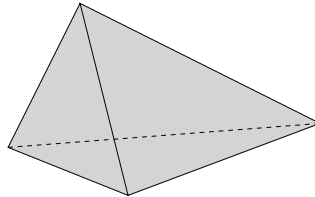
Exempel 3.3.9. Följande figur föreställer polyedern från Exempel 3.3.7, fast med en fasett F , en kant L och ett hörn \mathbf{v} utmarkerat.



▲

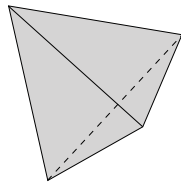
Anmärkning 3.3.10. Anledningen till att vi låter tomma mängden vara en sida är att vi vill kunna säga att två sidor av en polyeder skär varandra i en sida. I Exempel 3.3.9 är skärningen mellan till exempel sidorna F och L lika med den tomma mängden.

Exempel 3.3.11. En polyeder $T = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ som är det konvexa höljet av av precis fyra punkter i \mathbb{R}^3 kallas för en *tetraeder*.

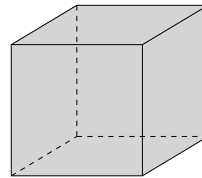


Notera att varje fasett av tetraeder är en triangel. ▲

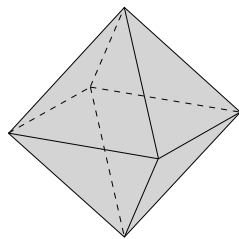
Exempel 3.3.12. En regelbunden polyeder är en polyeder vars fasetter är likformiga regelbundna polygoner. Det visar sig att, upp till val av skala, finns det bara fem regelbundna polyedrar och dessa kallas för de *platonska kropparna*. Vi illustrerar de fem platonska kropparna nedan.



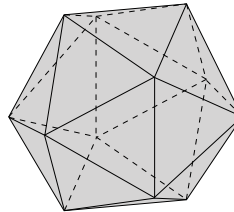
En regelbunden tetraeder.



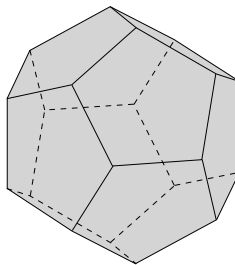
En kub (regelbunden hexaeder).



En regelbunden oktaeder.



En regelbunden ikosaeder.

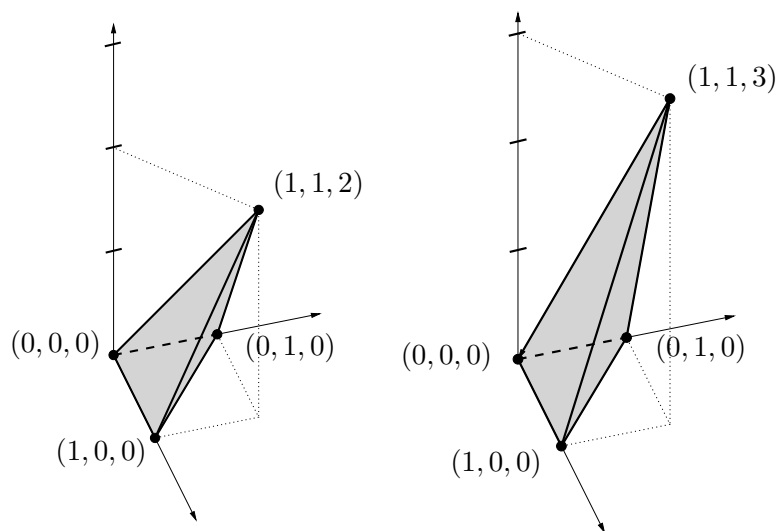


En regelbunden dodekaeder.

▲

I Kapitel 2 så bevisade vi Picks sats som sa att arean av en gitterpolygon kan beräknas genom att räkna antalet gitterpunkter i polygonen. Då det motsvarande tredimensionella konceptet för en area är *volym* så är en naturlig fråga man kan ställa sig om det finns en liknande formel för att bestämma volymen av en gitterpolyeder genom att räkna antalet gitterpunkter i polyedern. Det finns dessvärre inte, som följande exempel illustrerar.

Exempel 3.3.13. Betrakta följande par av gitterpolyedrar i \mathbb{R}^3 .



Det är tydligt att volymen av den högra är större än volymen av den vänstra. Picks sats sa att arean av en polygon gavs av formeln $i + \frac{r}{2} - 1$ där i är antalet inre gitterpunkter och r är antalet gitterpunkter på randen. Vi ser här att det *inte* kan finnas någon motsvarande formel för polyedrar och deras volymer eftersom polyedrarna ovan båda har sina fyra hörn som sina enda gitterpunkter men har olika volym. ▲

Detta är dock inte slutet på historien, som vi kommer se i Kapitel 4.

3.4 Högre dimensionella rum och polytober

Om man jämför definitionerna för planet och rummet så ser man att den enda skillnaden är att man har en extra koordinat i tre dimensioner. På samma sätt är enda skillnaden mellan definitionen för en polygon och en polyeder att punkterna som man tar det konvexa höljet av har en extra koordinat. Rent matematiskt ser vi att objekt med högre dimension än tre inte är särskilt konstigt.

Definition 3.4.1. Låt d vara ett positivt heltal. Det *euklidiska d -rummet* är mängden

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$$

och gitter ges av

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{Z}\}.$$

Vi kallar d för *dimensionen* av \mathbb{R}^d . Slutligen skriver vi $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ med d stycken 0:or och kallar denna punkt för *origo*.

Definition 3.4.2. En *polytop* är samlingsnamnet för konvexa höljen av ändligt många punkter i \mathbb{R}^d för $d = 1, 2, \dots$. En *gitterpolytop* är ett konvext hölje av ändligt många gitterpunkter i \mathbb{R}^d .

Exempel 3.4.3. Definitionen av en polytop fångar upp flera geometriska figurer som vi redan har stött på:

- (i) Ett linjesegment är det konvexa höljet av sina ändpunkter och är därför en endimensionell polytop.
- (ii) En polygon är det konvexa höljet av en mängd punkter som ligger i ett plan men inte längs en linje och är därför en tvådimensionell polytop.
- (iii) En polyeder är det konvexa höljet av mängd punkter som inte ligger i ett plan i \mathbb{R}^3 och är därför en tredimensionell polytop. ▲

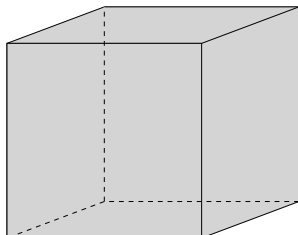
Att rita bilder av geometriska objekt som har en dimension som är större än tre är i princip omöjligt eftersom vi lever i ett tredimensionellt rum. Det finns dock tekniker som kan hjälpa en med hur man kan tänka på till exempel fyrdimensionella figurer. För att försöka föreställa oss motsvarigheten till en kub i fyra dimensioner börjar vi med ett linjesegment med sidlängd 1.



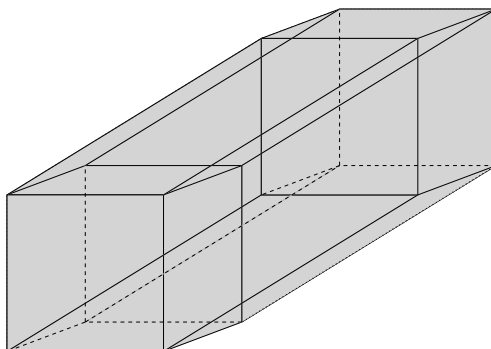
Om vi från varje punkt av linjesegmentet drar ett nytt linjesegment med samma längd som är vinkelrätt mot linjesegmentet vi startade med så får vi en kvadrat med sidlängd 1.



I varje punkt i kvadraten med sidlängd 1 lägger vi nu till ett linjesegment med samma längd som är vinkelrätt mot kvadraten. Vi erhåller då en kub med sidlängd 1.



Vi tänker oss nu att vi i varje punkt av kuben kan lägga till ett linjesegment som är vinkelrätt mot kuben och har längd 1. Detta är inte möjligt i dimension tre utan måste göras i \mathbb{R}^4 . Den fyrdimensionella kropp som då uppstår är den fyrdimensionella kuben, som ibland också kallas för *tessarekten*. Om vi struntar i kravet att de linjesegmenten vi lägger till ska vara vinkelräta mot kuben så får vi följande bild.



Anmärkning 3.4.4. Ett faktum man kan visa med lite mer matematisk bakgrund är att precis som randen av en polyeder består av polygoner så kommer randen av en polytop av dimension d att utgöras av polytopter av dimension $d - 1$. Därför kan man definiera en regelbunden polytop av dimension d som en polytop vars rand består av likformiga och regelbundna polytopter av dimension $d - 1$. En sådan definition generaliserar direkt hur vi definierade regelbundna polygoner och polyedrar. Det är lätt att övertyga sig om att det finns oändligt många regelbundna polygoner och i Exempel 3.3.12 hävdade vi att det bara finns fem stycken regelbundna polyedrar upp till skala. Under 1800-talet lyckades matematiker kartlägga hur många regelbundna polytopter det finns upp till skala av godtycklig dimension d . I alla dimensioner större än fyra finns precis tre stycken regelbundna polytopter och dessa motsvarar generaliseringar av tetraedern, kuben respektive oktaedern. I dimension fyra finns det utöver den fyrdimensionella motsvarigheten till en tetraeder, kub och oktaeder ytterligare tre stycken regelbundna fyrdimensionella polytopter som kallas för 24-cellen, 120-cellen och 600-cellen. De något fantasilösa namnen för dessa fyrdimensionella polytopter refererar till hur många polyedrar som utgör deras rand. Randen av 24-cellen utgörs av 24 stycken oktaedrar, randen av 120-cellen utgörs av 120 stycken dodekaedrar och randen av 600-cellen utgörs av 600 stycken tetraedrar.

Övningar

Övning 3.1 (★). Lös följande.

- (i) Beräkna $(4, 2) + 2(1, 1)$ och rita ut lösningen geometriskt.
- (ii) Beräkna $(1, 1, 1) - 3(2, 0, 1) + 4(0, 0, 1)$.

Övning 3.2 (★). Vad är det konvexa höljet av en punkt?

Övning 3.3 (★★). Visa att om $\mathbf{x} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ så är

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}).$$

Övning 3.4 (★★★). Följande uppgifter har alla att göra med konvexa höljen och linjesegment.

- (i) Visa att det konvexa höljet av tre punkter som ligger på en linje är lika med det konvexa höljet av de två yttersta punkterna.
- (ii) Visa att det konvexa höljet av k stycken punkter som ligger på en linje är lika med det konvexa höljet av de två yttersta.
- (iii) Visa att om ingen av k stycken punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ ligger i det konvexa höljet av de övriga $k - 1$ punkterna så ligger ingen trippel av punkter på en linje.

Övning 3.5 (★★★). Låt P vara en polyeder. Dualen till P är det konvexa höljet av mittpunkterna av fasetterna i P . Vad är dualen till kuben?

Övning 3.6 (★). Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi definierar följande algebraiska struktur på \mathbb{R}^d :

- (i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$,
- (ii) $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$.

Beräkna summorna $(1, 0, 0, 1) + (0, 1, 1, 0)$ och $(1, 2, 3, 4) + 3(1, 1, 0, 1)$.

Övning 3.7 (★★★). Motsvarigheten till en tetraeder i fyra dimensioner kallas för ett 4-simplex. Ett exempel på ett 4-simplex är polytopen

$$P = \mathbf{K}((0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Visa att P har precis fem gitterpunkter.

Övning 3.8 (★★). Följande övning handlar om sidor hos polyedrar.

- (i) Konstruera en polyeder vars fasetter utgörs av tre trapetser (fyrhörningar) och två trianglar.
- (ii) En sida av en polyeder P är en pentagon (femhörning). Hur många fasetter kan P som minst ha?

4 Genererande funktioner

Eftersom definitionerna av \mathbb{R}^2 och \mathbb{R}^3 är så lika kan man, varje gång man stöter på en sats som gäller i \mathbb{R}^2 , fråga sig om satsen har någon motsvarighet i \mathbb{R}^3 . Ett exempel på en sats som gäller i planet men som *inte* har någon motsvarighet i rummet är, som vi såg i förra kapitlet, Picks sats. När man hamnar i en sådan situation måste man ofta hitta ett nytt angreppssätt för att förstå vilka fenomen som generaliserar till högre dimensioner.

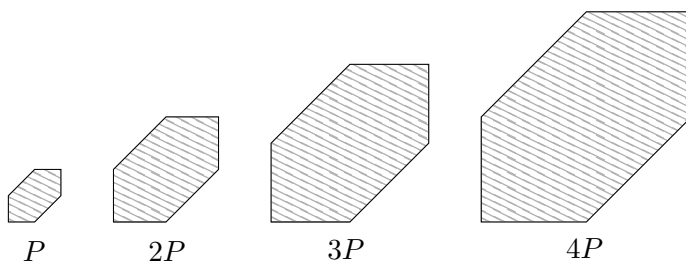
Vi börjar här med att definiera Ehrhartfunktionen för en polytop. För att kunna arbeta med denna funktion går vi sedan igenom genererande funktioner som är ett användbart verktyg för att hantera följder av tal.

4.1 Ehrhartfunktionen

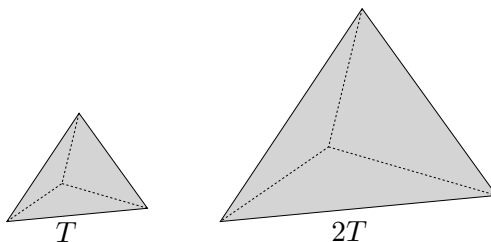
Vi såg i Exempel 3.3.13 att det inte finns någon motsvarighet till Picks sats för polyedrar. Det vill säga att det inte kan finnas en formel för volymen av en gitterpolyeder P som enbart beror på antalet gitterpunkter i P . Trots vetskapen om detta slutade inte matematiker att intressera sig för gitterpolyedrar. Så sent som på 1960-talet så studerade Eugène Ehrhart en funktion som gav en ny koppling mellan antalet gitterpunkter och volymen. Denna funktion kallas för *Ehrhartfunktionen* och för att kunna definiera den så behöver vi först introducera ett nytt geometriskt koncept, uppförstoringen av en polytop.

Definition 4.1.1. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ vara en polytop. För varje naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ definierar vi *uppförstoringen av P med faktorn n* att vara polytopen $nP = \mathbf{K}(n\mathbf{x}_1, \dots, n\mathbf{x}_k)$.

Exempel 4.1.2. Nedan är ett exempel på en polygon P som blivit uppförstorad.



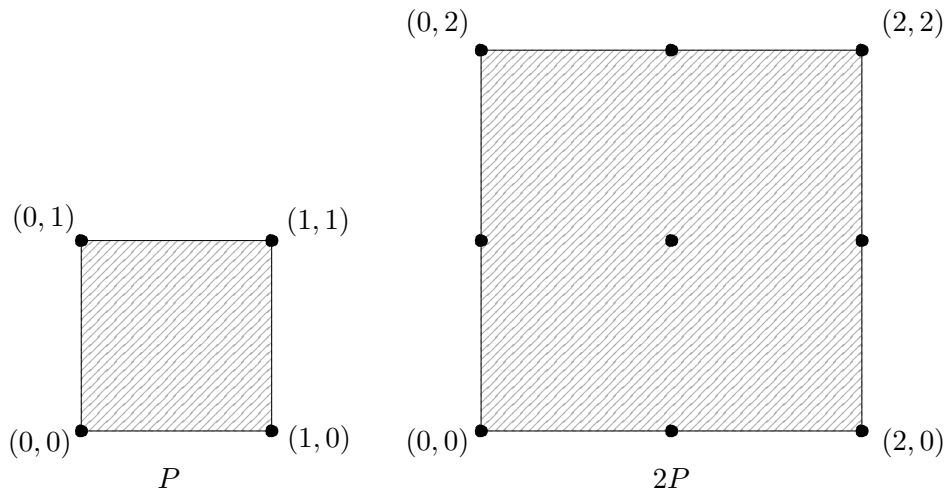
Ett exempel på en polyeder T som blivit uppförstorad är följande:



▲

Definition 4.1.3. Låt P vara en gitterpolytop. Vi definierar *Ehrhartfunktionen* $L_P(n)$ av P genom att för varje $n \in \mathbb{N}$ låta $L_P(n)$ vara antalet gitterpunkter i nP .

Exempel 4.1.4. Låt P vara kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$. Om vi ritar P och uppförstoringen $2P$ får vi följande.



Vi ser att P innehåller fyra stycken gitterpunkter vilket innebär att $L_P(1) = 4$. Eftersom $2P$ innehåller nio stycken gitterpunkter så är $L_P(2) = 9$. ▲

Vi vill nu relatera Ehrhartfunktionen av en gitterpolygon till Picks sats från Kapitel 2. För att göra detta behöver vi först förstå hur arean av en polygon förändras när den uppförstoras med en faktor n .

Hjälpssats 4.1.5. Låt P vara en gitterpolygon, låt n vara ett positivt heltal och låt r_n vara antalet gitterpunkter på randen till nP . Då gäller att

- (i) $\text{Area}(nP) = n^2 \text{Area}(P)$ och
- (ii) $r_n = n \cdot r_1$.

Bevis. Se Övning 4.2. □

Sats 4.1.6. Låt P vara en gitterpolygon med Ehrhartfunktion $L_P(n)$ och med r stycken gitterpunkter på sin rand. Om $a_2 = \text{Area}(P)$, $a_1 = \frac{r}{2}$ och $a_0 = 1$ så är $L_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$, vilket är ett andragradspolynom i n .

Bevis. Låt i_n vara antalet inre gitterpunkter i nP och låt r_n vara antalet gitterpunkter på randen till nP . Speciellt är då $r_1 = r$. Det totala antalet gitterpunkter i nP är då $L_P(n) = i_n + r_n$. Genom att göra de två räknetricken att skriva $r_n = \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{2}$ och att addera med $0 = 1 - 1$, får vi att

$$L_P(n) = i_n + r_n = i_n + \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{2} + (1 - 1) = \left(i_n + \frac{r_n}{2} - 1\right) + \frac{r_n}{2} + 1.$$

Från Picks sats, Sats 2.2.10, har vi att $\text{Area}(nP) = i_n + \frac{r_n}{2} - 1$ vilket ger att

$$L_P(n) = \left(i_n + \frac{r_n}{2} - 1\right) + \frac{r_n}{2} + 1 = \text{Area}(nP) + \frac{r_n}{2} + 1.$$

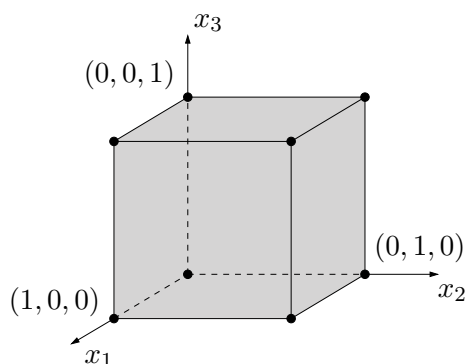
Slutligen säger Hjälpsats 4.1.5 att $\text{Area}(nP) = n^2 \text{Area}(P)$ och $r_n = nr_1 = nr$ så

$$L_P(n) = \text{Area}(nP) + \frac{r_n}{2} + 1 = n^2 \text{Area}(P) + \frac{nr}{2} + 1.$$

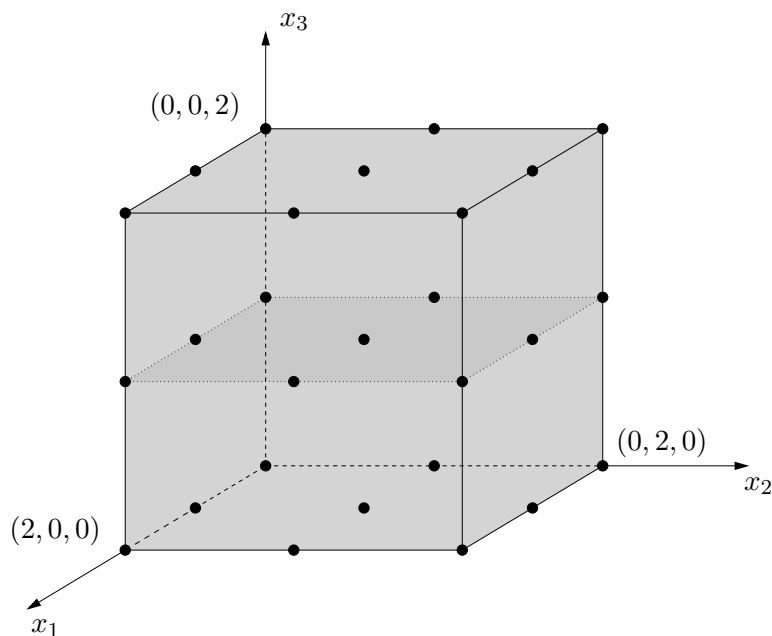
Därmed är $L_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$, där $a_2 = \text{Area}(P)$, $a_1 = \frac{r}{2}$ och $a_0 = 1$. \square

Vi såg i Exempel 3.3.13 att Picks sats inte gick att generalisera till gitterpolyedrar. Vad som däremot är sant är att Ehrhartfunktionen för en gitterpolyeder alltid är ett tredjegradspolynom och att koefficienten framför n^3 i detta polynom är lika med volymen av polyedern. Båda dessa resultat kommer vi bevisa i Kapitel 7. Här inleder vi med att studera funktionen $L_P(n)$ för en av de enklaste gitterpolyedrarna.

Exempel 4.1.7. *Enhetskuben* K i \mathbb{R}^3 är kuben vars hörn utgörs av alla gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ så att $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$. Notera att enhetskuben har sidlängd 1.



Vi ser att det finns åtta stycken gitterpunkter i K , så $L_K(1) = 8$. Om vi istället betraktar förstoringen $2K$ (och markerar mittenlagret för tydlighetens skull)



ser vi att den innehåller 27 stycken gitterpunkter, så $L_K(2) = 27$. I allmänhet gäller att nK är en kub med sidlängd n , så antalet gitterpunkter i nK är lika med $L_K(n) = (n + 1)^3$ eftersom varje kant innehåller precis $n + 1$ stycken gitterpunkter. Här ser vi alltså att

$$L_K(n) = (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

vilket är ett tredjegradspolynom i n och att koefficienten framför n^3 , det vill säga 1, är volymen av K . ▲

För en allmän polyeder kommer vi få en följd av tal $L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots$ och vi vill studera denna följd. Ett användbart redskap för att studera talföljder är genererande funktioner och det är detta ämne som nästa avsnitt handlar om.

4.2 Genererande funktioner

Vi kommer nu betrakta oändliga följder av tal, (a_0, a_1, a_2, \dots) där a_n är ett reellt tal för varje $n = 0, 1, 2, \dots$

Definition 4.2.1. Låt $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ vara en talföljd. Den *genererande funktionen* för talföljden \mathbf{a} är den formella summan

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

i variabeln t . Här använder vi oändlighetssymbolen ∞ för att understryka att den formella summan består av oändligt många termer.

Anmärkning 4.2.2. När vi definierar genererande funktioner som *formella* summor så använder vi ordet formell för att understryka att det *inte* är frågan om någon vanlig funktion. Eftersom genererande funktioner är formella summor av uttryck på formen $a_n t^n$, så är det naturligt att jämföra genererande funktioner med polynom som är *ändliga* summor av sådana uttryck. Om vi i ett polynom $f(t)$ sätter variabeln t lika med till exempel talet 2 så kan vi beräkna $f(2)$, det vill säga polynomets värde i punkten $t = 2$. Om vi å andra sidan försöker sätta $t = 2$ i en genererande funktion stöter vi direkt på problem eftersom vi då får en oändlig summa och sådana kan vi i allmänhet inte beräkna! Därför tänker vi på genererande funktioner enbart som en kompakt notation för talföljden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ och *inte* som en funktion.

Exempel 4.2.3. Betrakta talföljden $(1, 1, 1, \dots)$ med oändligt många upprepane 1:or. Den tillhörande genererande funktionen är $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$. På samma sätt har talföljden $(2, 2, 2, \dots)$ med oändligt många 2:or den genererande funktionen $\sum_{n=0}^{\infty} 2t^n$. ▲

Exempel 4.2.4. Ett polynom $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_n t^n$ är en genererande funktion till talföljden $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ med enbart nollor efter a_n -termen. Därför kan vi tänka på till exempel polynomet $p(t) = 5 + 2t + t^3$ som en genererande funktion för talföljden $(5, 2, 0, 1, 0, 0, \dots)$. ▲

Definition 4.2.5. Låt $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ och $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ vara två talföljder och låt $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ och $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ vara deras genererande funktioner. Då definierar vi

- (i) att $F(t)$ och $G(t)$ är *lika* om $a_n = b_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) *summan* av $F(t)$ och $G(t)$ som

$$F(t) + G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n,$$

- (iii) *produkten* av $F(t)$ och $G(t)$ som

$$\begin{aligned} F(t) \cdot G(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) t^n, \end{aligned}$$

- (iv) *skalningen* av $F(t)$ med talet $k \in \mathbb{R}$ som

$$k \cdot F(t) = k \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n t^n.$$

Anmärkning 4.2.6. Här kan det vara på sin plats att förklara varför definitionerna ovan ser ut som de gör. En anledning är att de är tänkta att generalisera hur vi räknar med polynom. Om till exempel

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad \text{och} \quad g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

är två polynom, så kan vi kontrollera att

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2, \\ f(t) \cdot g(t) &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)t + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)t^2, \\ k \cdot f(t) &= k a_0 + k a_1 t + k a_2 t^2. \end{aligned}$$

Definitionerna innebär också att andra vanliga räkneregler för polynom även gäller för genererande funktioner. Till exempel har vi att

$$F(t) \cdot (G(t) + H(t)) = F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t)$$

för genererande funktioner $F(t)$, $G(t)$ och $H(t)$, se Övning 4.11.

Anmärkning 4.2.7. Den genererande funktionen till $F(t) + G(t)$ är talföljden $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$. Vi noterar också att $F(t) \cdot G(t)$ är den genererande funktionen som hör till talföljden

$$(a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots)$$

samt att $kF(t)$ är den genererande funktionen till talföljden $(k a_0, k a_1, \dots)$.

Definition 4.2.8. Låt $F(t)$ och $G(t)$ vara två genererande funktioner. Om $F(t) \cdot G(t) = 1$ säger vi att $G(t)$ är *inversen* till $F(t)$ och vice versa. Vi inför också notationen $G(t) = \frac{1}{F(t)}$.

Anmärkning 4.2.9. Vi tolkar uttrycket $G(t) = \frac{1}{F(t)}$ som att $G(t)$ är den genererande funktion vi ska multiplicera $F(t)$ med för att få 1. En anledning till att vi inför denna notation är för att Definition 4.2.5 gör att vi kan räkna med inversen $\frac{1}{F(t)}$ som om det vore en kvot av polynom.

Exempel 4.2.10. Betrakta talserien $(1, 1, 1, \dots)$ av oändligt många ettor. Den tillhörande genererande funktionen är $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Vi har att

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \cdot (1 - t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = 1$$

där $1 - t$ är den genererande funktionen till talföljden $(1, -1, 0, 0, 0, \dots)$. Därmed drar vi slutsatsen att $(1 - t)$ är inversen till $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, det vill säga att

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1 - t}. \quad \blacktriangle$$

I Exempel 4.2.10 ovan ser vi att det är viktigt att genererande funktioner *inte* får betraktas som vanliga funktioner som man kan evaluera. Till exempel så är $\frac{1}{1-t}$ inte ens definierad om vi sätter $t = 1$ då vi i sådana fall dividerar med 0. Vi ser också att om vi försöker evaluera likheten

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1 - t}$$

i $t = 2$ får vi att $\frac{1}{1-2} = -1$ i högerledet, men i vänsterledet får vi den formella summan $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ som enbart består av positiva termer. Därför kan höger- och vänsterled omöjligt vara lika. Detta är ett konkret exempel på den poäng vi tidigare försökt understryka, nämligen att vi namnet till trots inte kan tänka på genererande funktioner som funktioner.

4.3 Fibonaccisekvensen

Det här avsnittet har inga direkta kopplingar till teorin om polytoper utan är tänkt att exemplifiera användbarheten hos genererande funktioner. Talföljden $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ är definierad av att

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= 1 \\ a_k &= a_{k-1} + a_{k-2} & \text{för } k &\geq 2. \end{aligned}$$

Denna talföljd förekommer i olika sammanhang och kallas för Fibonaccisekvensen efter matematikern Leonardo Fibonacci som levde runt 1200-talet. En av de första frågor man kan ställa om Fibonaccisekvensen är vad det n :te talet i denna följd är. Självklart kan vi beräkna a_n genom att räkna ut a_2, a_3, \dots, a_n

men om n är stort så kan detta vara väldigt tidskrävande. Därför vore det fördelaktigt om vi kunde hitta en sluten formel för a_n för alla n , det vill säga en formel som inte består av de tidigare talen i sekvensen. Ett sätt att härleda en sådan formel är genom genererande funktioner.

Sats 4.3.1. *Den genererande funktionen till Fibonaccisekvensen är*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Bevis. Vi utför multiplikationen

$$\begin{aligned} (1-t-t^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= (1-t-t^2)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) = \\ &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) - t(a_0 + a_1 t + \dots) - t^2(a_0 + a_1 t + \dots) \\ &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) - (a_0 t + a_1 t^2 + \dots) - (a_0 t^2 + a_1 t^3 + \dots) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)t + (a_2 - a_1 - a_0)t^2 + \dots + (a_k - a_{k-1} - a_{k-2})t^k + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Där vi i sista steget använt definitionen av Fibonaccisekvensen, nämligen att $a_k - a_{k-1} - a_{k-2} = 0$ för $k \geq 2$. Alltså har vi att $(1-t-t^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 1$, så

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2}. \quad \square$$

Vi noterar nu att a_n är koefficienten framför t^n i den genererande funktionen. Därför vill vi försöka skriva om $\frac{1}{1-t-t^2}$ så att vi lätt kan avläsa vad a_n är. För detta ändamål använder vi ett trick som kallas för *partialbråksuppdelning*. I Övning 4.5 visar vi att $1-t-t^2 = (1-\alpha_1 t)(1-\alpha_2 t)$ där $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Själva partialbråksuppdelningen går ut på att hitta två konstanter A och B så att

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{A}{1-\alpha_1 t} + \frac{B}{1-\alpha_2 t}.$$

Andra delen i Övning 4.5 är att visa att $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$ och $B = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{5}}$. Således gäller att

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1 t} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2 t} \right).$$

Från Övning 4.3 lånar vi nu det faktum att

$$\frac{1}{1-\alpha_1 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n t^n \quad \text{och} \quad \frac{1}{1-\alpha_2 t} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_2^i t^i.$$

Det följer att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t-t^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1 \frac{1}{1-\alpha_1 t} - \alpha_2 \frac{1}{1-\alpha_2 t} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^n t^n - \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^n t^n \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1(1 + \alpha_1 t + \alpha_1^2 t^2 + \dots) - \alpha_2(1 + \alpha_2 t + \alpha_2^2 t^2 + \dots)) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\alpha_1 + \alpha_1^2 t + \alpha_1^3 t^2 + \dots) - (\alpha_2 + \alpha_2^2 t + \alpha_2^3 t^2 + \dots)) = \\
&= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\sqrt{5}} t + \frac{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}{\sqrt{5}} t^2 + \dots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) t^n.
\end{aligned}$$

Därmed har vi följande likhet av formella summor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) t^n.$$

Det följer alltså att det n :te Fibonaccitalet är lika med

$$a_n = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$. Till exempel är

$$a_4 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5}{\sqrt{5}} = \dots = 5$$

och

$$a_{20} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{21} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{21}}{\sqrt{5}} = \dots = 10946$$

vilket läsaren även kan kontrollera direkt från definitionen.

4.4 Ehrhartserien

Precis som för Fibonaccisekvensen så kan genererande funktioner ge oss information om talföljder $(L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots)$ av antalet gitterpunkter i uppförstoringarna av en gitterpolytop P . Speciellt kommer genererande funktioner vara en viktig del i att visa att $L_P(n)$ är ett tredjegradspolynom i n om P är en gitterpolyeder.

Definition 4.4.1. Låt P vara en gitterpolytop. Vi definierar *Ehrhartserien* för P att vara den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n) t^n$$

till sekvensen $(L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots)$.

Exempel 4.4.2. Låt K vara kuben från Exempel 4.1.7. I det exemplet noterade vi att $L_K(n) = (n + 1)^3$. Därför är

$$\text{Ehr}_K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)^3 t^n$$

Ehrhartserien till K . ▲

Vi observerar att anledningen till att vi kunde skriva ner Ehrhartserien i exemplet ovan var att vi lätt kunde hitta Ehrhartfunktionen $L_K(n)$ för K . Att skriva ner Ehrhartserien $\text{Ehr}_P(t)$ för en allmän gitterpolyeder P är betydligt svårare. Vi kommer däremot kunna använda Ehrhartserien för att i Kapitel 6 och 7 visa att Ehrhartfunktionen är ett polynom.

Övningar

Övning 4.1 (★). Låt P vara en gitterpolytop och låt $n \in \mathbb{N}$. Visa att nP är en gitterpolytop.

Övning 4.2 (★★★). Visa Hjälpsats 4.1.5 genom att göra följande.

- (i) (a) Börja med att triangulera polygonen P (*Ledning*: Använd metoden från beviset av Hjälpsats 2.2.8). Motivera varför det räcker att visa påståendet för trianglar.
- (b) När man förstörar P med n blir varje längd n gånger längre. Använd att arean av en triangel T ges av $\frac{bh}{2}$ där b är basen och h är höjden för att visa att $\text{Area}(nT) = n^2 \text{Area}(T)$.
- (ii) (a) Börja med att visa att uppförstoringen av ett linjesegment med k stycken punkter har $nk - (n - 1)$ stycken gitterpunkter.
- (b) Låt L_1, L_2, \dots, L_m vara linjesegmenten på randen av P , där L_i har k_i stycken gitterpunkter för $i = 1, 2, \dots, m$. Visa att antalet gitterpunkter på randen ges av $k_1 + k_2 + \dots + k_m - m$.
- (c) Linjesegmenten på randen av nP ges av nL_1, nL_2, \dots, nL_m . Använd detta för att beräkna r_n .

Övning 4.3 (★). Visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \frac{1}{1 - at}$$

för alla $a \neq 0$.

Övning 4.4 (★). Låt (a_0, a_1, a_2, \dots) vara talföljden som har $\frac{1}{1+t}$ som genererande funktion. Vad är de fem första termerna i talföljden?

Övning 4.5 (★★). Den här uppgiften går ut på att visa detaljerna som lämnades som övning i avsnittet om Fibonaccisekvensen.

- (i) Expandera produkten $(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)$ och visa att den är lika med $1 - t - t^2$.
- (ii) Visa att $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$ och att $B = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{5}}$. (Ledning: Visa först att

$$\frac{A}{1 - \alpha_1 t} + \frac{B}{1 - \alpha_2 t} = \frac{A + B - t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)}{1 - t - t^2}.$$

Då detta uttryck ska vara lika med $\frac{1}{1-t-t^2}$ så fås att täljarna måste vara lika, det vill säga att $1 = A + B - t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)$. Speciellt måste dessa vara lika gradvis i t vilket ger ekvationssystemet $1 = A + B$ och $0 = \alpha_1 B + \alpha_2 A$.)

Övning 4.6 (**). Vad händer om vi låter Fibonaccisekvensen starta med $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Hur ser den genererande funktionen ut då?

Övning 4.7 (***). Bestäm konstanterna A och B så att

$$\frac{3t + 1}{(t - 1)(t + 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1}.$$

(Ledning: Använd metoden från Övning 4.5)

Övning 4.8 (**). Låt $P = \mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$.

- (i) Rita P och $2P$ och använd dessa figurer för att bestämma $L_P(1)$ och $L_P(2)$.
- (ii) Använd Sats 4.1.6 för att bestämma Ehrhartfunktionen till P och beräkna $L_P(n)$ för $n = 1, 2, 3, 4$.
- (iii) Vad är Ehrhartserien för P ?

Övning 4.9 (*). Hur många gitterpunkter har polygonen

$$P = \mathbf{K}((1, 0), (0, 0), (1, 1))?$$

Hur många gitterpunkter har $3P$?

Övning 4.10 (**). Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ vara en polytop. Visa att

$$nP = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \text{ och } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n\}.$$

Övning 4.11 (**). Visa att distributiva lagen gäller för genererande funktioner. Det vill säga, visa att om $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ och $H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ är genererande funktioner så gäller att

$$F(t) \cdot (G(t) + H(t)) = F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t).$$

5 Kombinatorik

Frågor av typen ”På hur många sätt kan man välja ut 5 stycken bollar bland 30 stycken bollar av olika färg?” eller ”Hur många uppsättningar av k stycken positiva heltal har samma summa?” brukar inrymmas inom den gren av matematiken som kallas kombinatorik. I det här kapitlet är vi intresserade av verktyg från kombinatoriken som kan hjälpa oss med att räkna gitterpunkter i polytober.

5.1 Grundläggande kombinatorik

Inom kombinatorik är man ofta intresserad av att räkna antalet sätt utföra något på. För att förenkla framställningen inleder vi med ett konkret exempel.

Exempel 5.1.1. Vi ställer oss följande fråga.

Om fem matematiker i tur och ordning väljer en av fem kriter i färgerna vit, röd, grön, blå och gul, på hur många sätt kan de fem kriter av olika färg fördelas?

För att besvara frågan noterar vi att den första matematikern har fem möjliga färger att välja mellan. Efter att den första matematikern gjort sitt val kommer den andra matematikern att ha fyra färger att välja mellan. Därefter kommer den tredje matematikern att ha tre färger att välja mellan och så vidare. Alltså finns det

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

olika sätt som färgkritorna kan fördelas mellan matematikerna. ▲

Motiverade av exemplet gör vi följande definition.

Definition 5.1.2. Låt $n \in \mathbb{N}$. Vi definierar talet $n!$ som antalet sätt att ordna n stycken objekt via

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1, & \text{om } n > 0, \\ 1, & \text{om } n = 0. \end{cases}$$

Vi uttalar $n!$ som *n fakultet*.

Exempel 5.1.3. I en vanlig kortlek finns det 13 stycken klöver. Om vi blandar enbart de 13 klöverkortet i en kortlek så är resultatet matematiskt samma sak som att lägga 13 kort i någon ordning. Därför finns det $13!$ olika sätt som de 13 klöverkortet kan ha ordnats efter att ha blandats. Miniräknaren ger att $13! \approx 6 \cdot 10^9$ och för att få en känsla av hur stort detta tal är så kan vi jämföra med antalet människor som lever på jorden vilket i skrivande stund är ungefär $7 \cdot 10^9$. ▲

En annan typ av frågeställningar som dyker upp i kombinatorik ges i följande exempel.

Exempel 5.1.4. Vi ställer oss frågan:

På hur många sätt kan man bland en vit, en röd, en grön, en blå och en gul krita välja ut tre stycken kriter, utan att ta hänsyn till den ordning man gör valen?

Att inte ta hänsyn till ordning betyder till exempel att valet *blå, grön, röd* ska ses som samma val som valet *grön, blå, röd*. Vi börjar med att räkna antalet sätt att välja ut tre färger *med* hänsyn till ordning. För att göra detta konstaterar vi först att det finns fem stycken val för första kriter. Därefter finns fyra stycken val för andra kriter och tre stycken val för tredje kriter. Sammanlagt finns alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ stycken val om vi tar hänsyn till ordning. Om vi istället vill beräkna antalet val oberoende av ordning behöver vi dividera med antalet sätt att ordna de tre kriter vi valt, det vill säga $3! = 6$. Sammanfattningsvis finns det alltså

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

stycken sätt att välja ut 3 av 5 kriter utan hänsyn till ordning. ▲

Precis som tidigare gör vi en definition motiverade av exemplet.

Definition 5.1.5. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ där $n \geq k$. Vi definierar talet $\binom{n}{k}$ som antalet sätt att bland n stycken föremål välja ut k stycken föremål utan hänsyn till ordning via

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Vi uttalar $\binom{n}{k}$ som *n välj k* (eller *n över k*). Vi definierar även $\binom{n}{k} = 0$ om $n < k$ eftersom det inte går att välja ut fler element än vad man har element att välja på.

Exempel 5.1.6. Att välja ut ett kort från de 52 korten i en vanlig kortlek går att göra på precis 52 olika sätt. Väljer man istället ut 2 kort kan man få

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 26 \cdot 51 = 1361$$

olika par av kort. ▲

Låt oss nu betrakta problemet med att räkna antal sätt som man kan placera n stycken likadana bollar i d stycken olika lådor.

Exempel 5.1.7. På hur många sätt kan man placera tre bollar (•) i två olika lådor? För att svara på den frågan noterar vi först att två lådor kan ses som en stor låda i vilken vi placerat ut en skiljevägg. Om vi har en stor låda med tre bollar kan vi alltså skapa två lådor med sammanlagt tre bollar genom att lägga in en skiljevägg någonstans mellan bollarna. Alla möjligheter för skiljeväggens placering illustreras nedan:



Här har vi till exempel att $\underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet} \underline{\bullet}$ svarar mot att placera alla tre bollar i första lådan och inga i den andra, och att $\underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet} \bullet \underline{\bullet}$ svarar mot att placera två bollar i den första lådan och en boll i den andra.

Metoden vi använde här kan göras mer strukturerad genom att tänka att vi har $3 + 1 = 4$ stycken platser att placera ut 1 skiljevägg på, vilket kan göras på $\binom{4}{1} = 4$ sätt. Sedan fyller vi helt enkelt de resterande 3 platserna med de 3 bollarna vilket inte påverkar antalet möjligheter. ▲

Exempel 5.1.8. På hur många sätt kan man placera ut fyra bollar i tre olika lådor? Genom att använda samma metod som i Exempel 5.1.7 kan vi tänka oss att vi har $3 - 1 = 2$ skiljeväggar att placera ut bland $4 + 2 = 6$ stycken platser. Till exempel kan vi placera ut skiljeväggarna så här: $\underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet}$. Efter att ha fyllt de resterande platserna med bollar ser vi att detta ger en boll i den första lådan, två i den andra och en i den sista lådan: $\underline{\bullet} \bullet \underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet} \underline{\bullet}$. Antal sätt att placera ut dessa två skiljeväggar bland de sex möjliga platserna ges av $\binom{6}{2} = 15$, så det finns 15 stycken sätt att placera 4 bollar i 3 lådor. ▲

Sats 5.1.9. Antalet sätt att placera n bollar i d olika lådor är $\binom{d-1+n}{d-1}$.

Bevis. Vi använder samma konstruktion som i Exempel 5.1.7 och 5.1.8. Då har vi $d - 1$ stycken skiljeväggar att placera ut bland $d - 1 + n$ stycken platser. Detta kan göras på precis $\binom{d-1+n}{d-1}$ stycken sätt. □

Sats 5.1.10. Antalet sätt att placera som mest n stycken bollar i d stycken olika lådor ges av $\binom{d+n}{d}$.

Bevis. Eftersom man kan lägga de bollar som inte placeras i någon av de d lådorna i en komplementlåda så kan man omformulera problemet till att placera n stycken bollar i $d + 1$ stycken lådor. Detta kan enligt Sats 5.1.9 göras på $\binom{(d+1)-1+n}{(d+1)-1} = \binom{d+n}{d}$ stycken sätt. □

5.2 Att räkna gitterpunkter

Vårt huvudsakliga intresse i det här kompendiet är att studera polytoper och speciellt gitterpolyedrar. I resten av det här kapitlet kommer vi därför använda de kombinatoriska begrepp vi just infört för att bevisa resultat som är relevanta för just gitterpolyedrar.

För att göra detta kommer vi använda att vi kan representera gitterpunkter med bollar i lådor.

Exempel 5.2.1. Gitterpunkten $\mathbf{x} = (3, 1, 2)$ i \mathbb{R}^3 kan representeras av tre lådor med tre, en, respektive två bollar i sig,

$\underline{\bullet} \bullet \bullet \underline{\bullet} \underline{\bullet} \underline{\bullet} \bullet \underline{\bullet} \underline{\bullet}$ ▲

I allmänhet ser vi att en gitterpunkt $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ kan representeras av d stycken lådor där den i :te lådan innehåller x_i stycken bollar för alla $i = 1, 2, \dots, d$.

Sats 5.2.2. Låt $n \in \mathbb{N}$. Det finns $\binom{3+n}{3}$ gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ så att $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 \leq n$.

Bevis. Genom att representera gitterpunkter med bollar i lådor som ovan inser vi att detta handlar om att lägga *som mest* n stycken bollar i 3 stycken lådor vilket enligt Sats 5.1.10 är lika med $\binom{3+n}{3}$. \square

Följdsats 5.2.3. Låt T vara tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Då är

$$L_T(n) = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}.$$

Bevis. Enligt Övning 4.10 består nT av punkter på formen

$$\lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 1) = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

så att $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = n$. Då $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ej innehåller något λ_1 kan detta skrivas som $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \leq n$. Om vi ändrar notation från λ till x får vi därmed att

$$nT = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ och } x_1 + x_2 + x_3 \leq n\}.$$

Gitterpunkterna i nT är därför

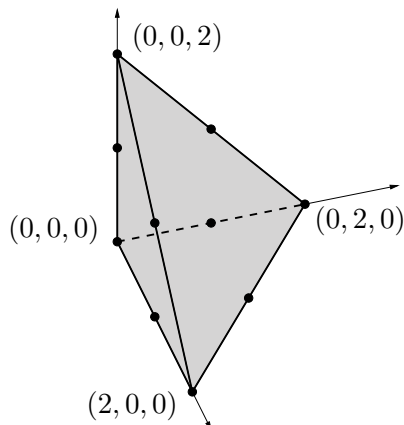
$$nT \cap \mathbb{Z}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ och } x_1 + x_2 + x_3 \leq n\}.$$

och resultatet följer nu direkt av Sats 5.2.2. \square

Exempel 5.2.4. Låt T vara tetraedern med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Enligt Följdsats 5.2.3 är antalet gitterpunkter i

$$2T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2))$$

lika med $\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = 10$. Från följande bild:



kan vi se att dessa punkter är

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), \\ (1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2).$$

▲

5.3 Kombinatorik och formella summor

När vi betraktade genererande funktioner i Kapitel 4 såg vi att det n :te talet i Fibonaccisekvensen gavs av $\frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$, vilket *inte* är ett polynom i n . I Kapitel 4 intresserade vi oss för Ehrhartserien som var den genererande funktionen till talföljden $(L_P(0), L_P(1), L_P(2), \dots)$. Eftersom vi vill visa att $L_P(n)$ är ett polynom i n så behöver vi ett resultat som kan förutsäga när en talföljd ges av ett polynom. Ett sådant resultat får vi från följande påståenden.

Hjälpsats 5.3.1. *Låt $n \in \mathbb{N}$. Antalet gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$ så att $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ är $\binom{3+n}{3}$.*

Bevis. Detta svarar mot att placera ut n stycken bollar i fyra lådor. Från Sats 5.1.9 kan detta göras på $\binom{(4-1)+n}{(4-1)} = \binom{3+n}{3}$ sätt. \square

Hjälpsats 5.3.2. *Följande likhet mellan genererande funktioner gäller:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} t^n.$$

Bevis. Vi har att

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^4 = (1+t+t^2+\dots)(1+t+t^2+\dots)(1+t+t^2+\dots)(1+t+t^2+\dots).$$

Produkten av dessa parenteser är en formell summa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ där a_n är antalet gånger som t^n fås som en produkt

$$t^n = t^{x_1} t^{x_2} t^{x_3} t^{x_4} = t^{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

med $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ där $x_i \geq 0$ kommer från parentes i för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Detta är ekvivalent med att välja punkter $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$ med $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ och $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Från Sats 5.3.1 kan detta göras på $\binom{3+n}{3}$ sätt. Därmed är $a_n = \binom{3+n}{3}$ för alla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ \square

Genom att använda resultaten ovan kan vi nu formulera de två följande satserna som ger information om när en talföljd $(f(0), f(1), f(2), \dots)$ ges av ett polynom.

Hjälpsats 5.3.3. *Antag att vi har följande likhet av formella uttryck:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{t^k}{(1-t)^4}$$

där $k = 0, 1, 2$ eller 3 . Då är

$$f(n) = \binom{3+n-k}{3}$$

vilket är ett tredjegradspolynom i variabeln n .

Bevis. Från Exempel 4.2.10 har vi att

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

så det följer från Hjälpsats 5.3.2 att

$$\frac{1}{(1-t)^4} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^4 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} t^n.$$

Därmed har vi att

$$\frac{t^k}{(1-t)^4} = t^k \frac{1}{(1-t)^4} = t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{3} t^{n+k}.$$

Koefficienten framför t^{n+k} i denna formella summa är $\binom{3+n}{3}$, vilket är ekvivalent med att koefficienten framför t^n är $\binom{3+n-k}{3}$. Speciellt ser vi att om $n < k$ så är $\binom{3+n-k}{3} = 0$. Alltså har vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{t^k}{(1-t)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-k}{3} t^n.$$

Det följer att

$$\begin{aligned} f(n) &= \binom{3+n-k}{3} = \frac{(3+n-k)(2+n-k)(1+n-k)}{3!} = \\ &= \frac{n^3 + (6-3k)n^2 + (11-12k+3k^2)n + 6-11k+6k^2-k^3}{6}, \end{aligned}$$

vilket är ett tredjegradspolynom i n . □

Sats 5.3.4. *Antag att vi har följande likhet av formella uttryck:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^4}$$

där $g(t)$ är ett polynom av grad som mest 3. Då är även $f(n)$ ett polynom av grad som mest 3.

Bevis. Eftersom $g(t)$ är ett polynom av grad som mest 3 så kan vi skriva

$$g(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

för några $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Vi har alltså att

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n &= g(t) \frac{1}{(1-t)^4} = (a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) \frac{1}{(1-t)^4} = \\ &= a_3 \frac{t^3}{(1-t)^4} + a_2 \frac{t^2}{(1-t)^4} + a_1 \frac{t}{(1-t)^4} + a_0 \frac{1}{(1-t)^4}. \end{aligned}$$

Enligt Hjälpsats 5.3.3 följer det att

$$a_k \frac{t^k}{(1-t)^4} = a_k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-k}{3} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k \binom{3+n-k}{3} t^n$$

för $k = 0, 1, 2, 3$. Därför gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_3 \binom{n}{3} + a_2 \binom{n+1}{3} + a_1 \binom{n+2}{3} + a_0 \binom{n+3}{3} \right) t^n.$$

Eftersom två genererande funktioner är lika om och endast om koefficienterna framför t^n är lika för alla n drar vi slutsatsen att

$$f(n) = a_3 \binom{n}{3} + a_2 \binom{n+1}{3} + a_1 \binom{n+2}{3} + a_0 \binom{n+3}{3}$$

för alla n . Därmed är $f(n)$ en summa av tredjegradspolynom så $f(n)$ måste vara ett polynom av grad som mest 3. \square

Denna sats kommer vi i Kapitel 7 använda för att visa att Ehrhartfunktionen är ett polynom genom att i nästa kapitel visa att Ehrhartserien kan skrivas som en kvot av polynom.

Övningar

Övning 5.1 (★). Vilket tal är störst: $4!$ eller $\binom{6}{3}$?

Övning 5.2 (★). På hur många sätt kan hörnen i en hexagon (sexhörning) numreras från ett till sex?

Övning 5.3 (★). På hur många sätt kan man från mängden $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ välja ut 3 stycken olika siffror?

Övning 5.4 (★★). I luffarschack består spelplanen av 9 rutor. Spelet går ut på att två spelare turas om att lägga ut sina pjäser på brädet med motivationen att få tre av sina pjäser i en rad. Pjäserna för den spelare som börjar är kors medan den andra spelarens pjäser är ringar. *På hur många sätt kan spelarna lägga ut alla sina pjäser på brädet om spelet inte avbryts för att någon vinner?*

Övning 5.5 (★★). Följande uppgift visar en koppling mellan gitterpunkter i \mathbb{Z}^3 och monom i tre variabler.

- (i) Hur många gitterpunkter $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ så att $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ finns det?

(ii) Hur många monom av grad som mest 2 finns det i variablerna s_1, s_2 och s_3 ? (Ett monom av grad n i variablerna s_1, s_2 och s_3 är ett uttryck på formen $s_1^{x_1}s_2^{x_2}s_3^{x_3}$ så att $x_1 + x_2 + x_3 = n$ och $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.)

(iii) Hur många monom av grad som mest n finns det i variablerna s_1, s_2 och s_3 ?

Övning 5.6 (*). Låt $n \in \mathbb{N}$. Hur många gitterpunkter $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ så att $x_i \geq 0$ för $i = 1, 2$ och $x_1 + x_2 \leq n$ finns det?

Övning 5.7 (**). Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Övning 5.8 (***) . Kvadreringsregeln säger att

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kvadreringsregeln är ett specialfall av *binomialsatsen* som säger att

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(i) Använd binomialsatsen för att visa kubregeln

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

(ii) Bevisa binomialsatsen. (*Ledning*: Om man utvecklar $(a + b)^n$ så kommer man få en summa på formen $\sum_{k=0}^n c_k a^{n-k} b^k$. Varför? På hur många sätt kan man välja ut k stycken b från de n stycken parenteserna $(a + b)^n$?)

Övning 5.9 (***) . Binomialsatsen illustreras ofta genom *Pascals triangel* där talen i den $(n + 1)$:ta raden är koefficienterna som dyker upp i $(a + b)^n$. Nedan illustreras de 6 första raderna i Pascals triangel.

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			
...	⋮

Konstruktionen av Pascals triangel baseras på likheten

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{5.1}$$

(i) Förklara vad likheten (5.1) säger om hur rad n i Pascals triangel kan skapas givet rad $n - 1$.

(ii) Bevisa likheten (5.1).

Övning 5.10 (*). Låt $T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Vad är $L_T(6)$?

6 Ehrhartserier och koner

I detta kapitel kommer vi börja föra samman det vi studerat tidigare. Vi börjar med att introducera konen över en polytop P som kommer beskriva alla förstoringar av P samtidigt. Speciellt kommer vi se att gitterpunkterna i konen är starkt förknippade med Ehrhartserien av P . Slutligen visar vi ett resultat som säger att Ehrhartserien kan skrivas som en kvot av två polynom. Detta kommer att spela en nyckelroll när vi i Kapitel 7 visar Ehrharts sats för gitterpolyedrar.

6.1 Koner

Vi kommer för en punkt $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ och ett tal $n \in \mathbb{N}$ använda notationen (\mathbf{v}, n) för punkten $(x_1, x_2, \dots, x_d, n) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Till exempel, om $\mathbf{v} = (2, 1)$ så är $(\mathbf{v}, 4) = (2, 1, 4)$.

Definition 6.1.1. Låt $P \subset \mathbb{R}^d$ vara en polytop med hörnen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Vi definierar *konen över P* som

$$\text{Kon}(P) = \{k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1) \mid k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0\}$$

vilket är en delmängd av \mathbb{R}^{d+1} . Vidare definierar vi *höjden* av en punkt $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \in \text{Kon}(P)$ att vara punktens sista koordinat, x_{d+1} .

Notera att om P ligger i \mathbb{R}^d så är $\text{Kon}(P)$ en delmängd av \mathbb{R}^{d+1} . Alltså, om P är en polygon i \mathbb{R}^2 så är konen $\text{Kon}(P)$ en delmängd i \mathbb{R}^3 och om P är en polyeder i \mathbb{R}^3 så ligger konen $\text{Kon}(P)$ i \mathbb{R}^4 .

Exempel 6.1.2. Låt $P = \mathbf{K}(0, 1) \subset \mathbb{R}$, det vill säga linjesegmentet i \mathbb{R} från 0 till 1. Då är konen över P lika med mängden

$$\text{Kon}(P) = \{k_1(0, 1) + k_2(1, 1) \mid k_1, k_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

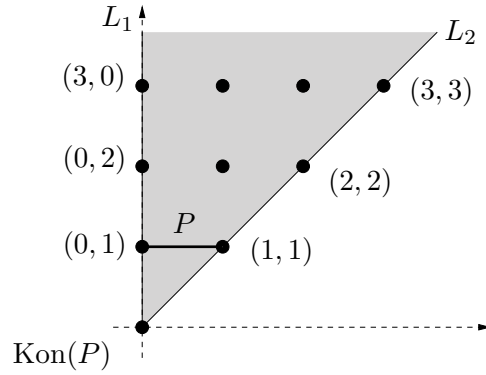
För att beskriva $\text{Kon}(P)$ geometriskt noterar vi att mängden

$$L_1 = \{k_1(0, 1) \mid k_1 \geq 0\} = \{(0, k_1) \mid k_1 \geq 0\}$$

är precis den icke-negativa delen av x_2 -axeln. Vidare är mängden

$$L_2 = \{k_2(1, 1) \mid k_2 \geq 0\} = \{(k_2, k_2) \mid k_2 \geq 0\}$$

lika med linjen från origo som går igenom punkten $(1, 1)$. Som en konsekvens måste varje punkt på formen $k_1(0, 1) + k_2(1, 1)$ vara en summa av en punkt på linjen L_1 och en punkt på linjen L_2 . Detta ger oss att konen över P har följande utseende (där vi även markerat gitterpunkterna):



Vi ser att P själv återfinns i konen på höjd 1. ▲

Exempel 6.1.3. Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0,0), (1,0), (0,1))$ med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Varje punkt \mathbf{x} som ligger i konen $\text{Kon}(P)$ kan då skrivas som

$$\mathbf{x} = k_1(0,0,1) + k_2(1,0,1) + k_3(0,1,1)$$

med $k_1, k_2, k_3 \geq 0$. Vi observerar först att mängderna

$$L_1 = \{k_1(0,0,1) \mid k_1 \geq 0\} = \{(0,0,k_1) \mid k_1 \geq 0\},$$

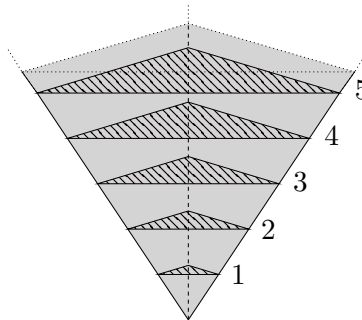
$$L_2 = \{k_2(1,0,1) \mid k_2 \geq 0\} = \{(k_2,0,k_2) \mid k_2 \geq 0\},$$

$$L_3 = \{k_3(0,1,1) \mid k_3 \geq 0\} = \{(0,k_3,k_3) \mid k_3 \geq 0\},$$

är de tre linjerna som går från origo genom punkterna $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ respektive $(0,1,1)$. Därmed drar vi slutsatsen att en punkt på formen

$$\mathbf{x} = k_1(0,0,1) + k_2(1,0,1) + k_3(0,1,1)$$

med $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ är summan av en punkt på var och en av de tre linjerna beskrivna ovan. Eftersom k_1 , k_2 och k_3 var godtyckliga kan vi dra slutsatsen att konen $\text{Kon}(P)$ består av mängden av alla sådana summor.



Denna figur är alltså konen över triangeln $P = \mathbf{K}((0,0), (1,0), (0,1))$ där vi markerat snitten på höjderna 1, 2, 3, 4 och 5. Notera att alla snitt är trianglar av samma form som P själv. ▲

I de två exemplen ovan så noterar vi att polytopen P själv förekommer i konen som snittet på höjd 1. Vi ser till och med att förstoringen av P med faktorn

n förekommer som snittet av konen på höjd n . Detta är inte en tillfällighet i dessa exempel utan gäller för godtyckliga polytoper.

Sats 6.1.4. Låt P vara en polytop i \mathbb{R}^d och låt $n \in \mathbb{N}$. Då är

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mid (\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)\} = nP.$$

Det vill säga att om man tar bort sista koordinaten från alla punkter i konen över P på höjd n så får man precis förstoringen nP av P .

Bevis. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ och låt $M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mid (\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)\}$. För att visa att mängderna M och nP är lika visar vi att de är delmängder av varandra.

Vi börjar med att ta ett $\mathbf{v} \in M$. Per definition är då $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, n)$ en punkt i $\text{Kon}(P)$ och är därför på formen

$$\mathbf{x} = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1)$$

för några $k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0$. Därmed har vi att

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, n) = \mathbf{x} &= k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + \dots + k_m(\mathbf{v}_m, 1) = \\ &= (k_1\mathbf{v}_1, k_1) + (k_2\mathbf{v}_2, k_2) + \dots + (k_m\mathbf{v}_m, k_m) = \\ &= (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m, k_1 + k_2 + \dots + k_m) \end{aligned}$$

så $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m$ och $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Alltså är $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ en punkt på formen

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_m\mathbf{v}_m$$

med $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ och $k_i \geq 0$ för $i = 1, 2, \dots, m$. Detta ger från Övning 4.10 att $\mathbf{v} \in nP$. Därmed har vi visat att om $\mathbf{v} \in M$ så är $\mathbf{v} \in nP$, vilket medför att $M \subseteq nP$.

Att $nP \subseteq M$ visas i Övning 6.4.

De två inklusionerna medför nu att $nP = M$. □

Exempel 6.1.5. Om vi låter K vara enhetskuben från Exempel 4.4.2 så kommer $\text{Kon}(K)$ att vara 4-dimensionell. Som vi noterade i slutet av Kapitel 3 är fyrdimensionella objekt svåra att visualisera. Speciellt är det svårt att föreställa sig hur konen över K ser ut. Ett sätt att försöka föreställa sig $\text{Kon}(K)$ är att använda sig av Sats 6.1.4 som säger hur snittet av $\text{Kon}(K)$ ser ut på olika höjder. Mer precist så säger satsen att mängden av alla punkter i $\text{Kon}(K)$ med x_4 -koordinat lika med n är nK , kuben med sidlängd n .

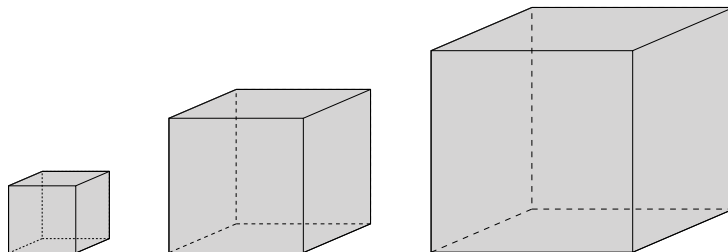


Figure 6.1: Snitt av $\text{Kon}(K)$ på höjd 1, 2 och 3

Därmed kommer snitten av konen över K i varje höjd vara en kub, på samma sätt som att snitten av konen över triangeln från Exempel 6.1.3 i varje höjd var en triangel. ▲

6.2 Ehrhartserien och konen över en polyeder

Vi har nu sett två sätt att studera en gitterpolytop P tillsammans med uppförstoringarna nP för alla $n \in \mathbb{N}$. Det första sättet var med hjälp av Ehrhartserien som var den genererande funktionen

$$\text{Ehr}_P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n.$$

Det andra sättet var genom konen över P som hade egenskapen att mängden av alla punkter på höjd n i $\text{Kon}(P)$ var nP . Eftersom $L_P(n)$ är lika med antalet gitterpunkter i nP så följer det att Ehrhartserien räknar upp de oändligt många gitterpunkterna i konen över P genom att först räkna alla på höjd 0, sedan alla på höjd 1, sedan alla på höjd 2 och så vidare.

En väldigt kraftfull men samtidigt enkel teknik i matematik är att räkna en sak på två olika sätt och sedan jämföra de två resultaten. Vi vet att Ehrhartserien räknar alla gitterpunkter i konen genom att summera antalet gitterpunkter i varje höjd. Nu vill vi försöka räkna antalet gitterpunkter i konen på ett annat sätt.

För att göra detta börjar vi med att associera en produkt av variabler till en gitterpunkt.

Definition 6.2.1. Till varje gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ i \mathbb{R}^d associerar vi uttrycket

$$s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots s_d^{x_d},$$

i d stycken variabler s_1, s_2, \dots, s_d så att variabel s_i svarar mot koordinat x_i för $i = 1, 2, \dots, d$. Vi inför även den förkortade notationen $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots s_d^{x_d}$.

Exempel 6.2.2. I \mathbb{R}^2 har en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ två koordinater och hör därför till uttrycket $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2}$ i de två variablerna s_1 och s_2 . Till exempel motsvarar gitterpunkten $(3, 5)$ uttrycket $s^{(3,5)} = s_1^3 s_2^5$ och gitterpunkten $(7, 14)$ motsvarar $s^{(7,14)} = s_1^7 s_2^{14}$. ▲

Exempel 6.2.3. I \mathbb{R}^4 har en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ fyra koordinater och vi associerar denna punkt till uttrycket $s^{\mathbf{x}} = s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3} s_4^{x_4}$ i variablerna s_1, s_2, s_3 och s_4 . Exempelvis är $(5, 4, 6, 7)$ en gitterpunkt i \mathbb{R}^4 som hör till uttrycket $s^{(5,4,6,7)} = s_1^5 s_2^4 s_3^6 s_4^7$. ▲

Definition 6.2.4. För en delmängd $M \subset \mathbb{R}^d$ definierar vi den formella summan

$$S_M(s) = \sum_{\mathbf{x} \in M \cap \mathbb{Z}^d} s^{\mathbf{x}}.$$

Exempel 6.2.5. Låt P vara linjesegmentet $\mathbf{K}(0, 1)$ i \mathbb{R} från Exempel 6.1.2. Mängden av gitterpunkter till P är $P \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$ och vi får att

$$S_P(s) = \sum_{x \in P \cap \mathbb{Z}} s^x = \sum_{x \in \{0, 1\}} s^x = s^0 + s^1. \quad \blacktriangle$$

Exempel 6.2.6. Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ som vi såg i Exempel 6.1.3. Gitterpunkterna i P är precis hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ så det följer att

$$S_P(s) = \sum_{\mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^2} s^{\mathbf{x}} = s^{(0,0)} + s^{(1,0)} + s^{(0,1)} = s_1^0 s_2^0 + s_1^1 s_2^0 + s_1^0 s_2^1. \quad \blacktriangle$$

Eftersom varje gitterpolytop P har ändligt många gitterpunkter så kommer $S_P(s)$ att vara en ändlig summa och antalet termer i $S_P(s)$ kommer per definition vara lika med antalet gitterpunkter i P . Då $S_P(s)$ har ändligt många termer så kan vi *evaluera* $S_P(s)$ i $s = 1$, med vilket vi menar att vi byter ut alla termer $s^{\mathbf{x}}$ i $S_P(s)$ mot 1. Om P har m stycken gitterpunkter så blir $S_P(1) = m$, där vi med $S_P(1)$ menar evalueringen av $S_P(s)$ i $s = 1$.

Exempel 6.2.7. Låt P vara triangeln från Exempel 6.2.6. Då har vi att $S_P(s) = s^{(0,0)} + s^{(1,0)} + s^{(0,1)}$ och att $S_P(1) = 1 + 1 + 1 = 3$. \blacktriangle

Till skillnad från en gitterpolytop P så innehåller konen över P oändligt många gitterpunkter. Därför har $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ oändligt många termer. Trots detta kan vi göra följande användbara omskrivning av $S_{\text{Kon}(P)}(s)$.

Hjälpssats 6.2.8. Låt P vara en polytop i \mathbb{R}^d . Då gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s) = S_{0P}(s) \cdot s_{d+1}^0 + S_P(s) \cdot s_{d+1}^1 + S_{2P}(s) \cdot s_{d+1}^2 + \dots$$

Bevis. Per definition så består $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ av termer på formen $s^{\mathbf{x}}$ där \mathbf{x} är en gitterpunkt i konen $\text{Kon}(P)$. Enligt Sats 6.1.4 är varje gitterpunkt \mathbf{x} på höjd n på formen $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, n)$ där \mathbf{v} är en gitterpunkt i nP . Därmed är $S_{\text{Kon}(P)}(s)$ en summa av termer på formen $s^{(\mathbf{v}, n)}$ där $n \in \mathbb{N}$ och \mathbf{v} är en gitterpunkt i nP . Satsen följer nu genom att ordna termerna $s^{(\mathbf{v}, n)} = s^{\mathbf{v}} s_{d+1}^n$ efter värdet på n . \square

Efter att ha sett denna sats noterar vi att den sista variabeln s_{d+1} utmärker sig från de övriga när man betraktar konen över en polytop P . Vi inför därför notationen $t = s_{d+1}$ så att varje gitterpunkt $(\mathbf{v}, n) \in \text{Kon}(P)$ associeras till uttrycket $s^{\mathbf{v}} t^n$ enligt Definition 6.2.1. Vår nya notation gör att vi kan skriva om resultatet från Hjälpssats 6.2.8 som

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_{0P}(s) \cdot t^0 + S_P(s) \cdot t^1 + S_{2P}(s) \cdot t^2 + \dots$$

Vi har alltså att $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ är en summa av uttryck på formen $S_{nP}(s) \cdot t^n$ för $n \in \mathbb{N}$. Eftersom $S_{nP}(s)$ är en ändlig summa för varje n så kan vi för varje n evaluera $S_{nP}(s)$ i $s = 1$. Om vi evaluerar $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ i $s = 1$ får vi därmed den formella summan

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = S_{0P}(1) \cdot t^0 + S_P(1) \cdot t^1 + S_{2P}(1) \cdot t^2 + \dots$$

Denna summa har vi stött på tidigare.

Sats 6.2.9. Låt P vara en gitterpolytop i \mathbb{R}^d . Då gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_P(n)t^n = \text{Ehr}_P(t).$$

Bevis. Enligt Hjälpsats 6.2.8 har vi att

$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = S_{0P}(1) \cdot t^0 + S_P(1) \cdot t^1 + S_{2P}(1) \cdot t^2 + \dots$$

Eftersom $S_{nP}(1)$ är lika med antalet gitterpunkter i nP som i sin tur är lika med $L_P(n)$ följer satsen. \square

6.3 Att räkna samma sak på två olika sätt

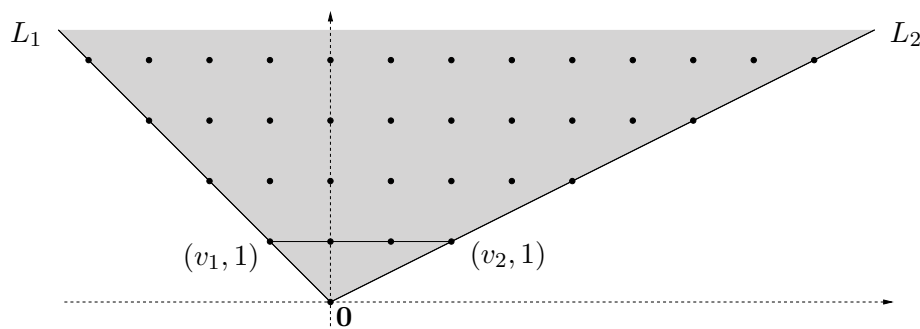
Med hjälp av den formella summan $S_{\text{Kon}(P)}(s, t)$ kan vi nu göra det som vi förklarade att vi ville göra i början av detta kapitel, nämligen att räkna gitterpunkterna i konen över en gitterpolytop P på ett annat sätt än höjdviss. Vi börjar med att bestämma mängden av gitterpunkter i $\text{Kon}(P)$ i fallet då P är ett linjesegment. Notera att konen $\text{Kon}(v)$ över en punkt $v \in \mathbb{R}$ är lika med linjen från origo som går igenom punkten $(v, 1)$.

Hjälpsats 6.3.1. Låt $P = \mathbf{K}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^1$ vara ett linjesegment. Då kan varje gitterpunkt \mathbf{x} i konen $\text{Kon}(P)$ på ett unikt sätt skrivas som

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

där \mathbf{p} är en gitterpunkt i $Q = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 < 1\}$, \mathbf{x}_1 är en gitterpunkt i $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ och \mathbf{x}_2 är en gitterpunkt i $L_2 = \text{Kon}(v_2)$.

Då beviset av denna sats inte förklarar den geometriska tanken bakom påståendet så väljer vi först att förklara vad vi kommer göra. Betrakta därför följande exempel:

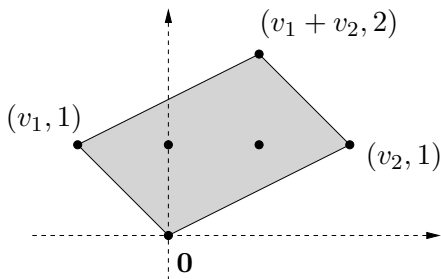


Figur 6.2: Konen över $P = \mathbf{K}(v_1, v_2)$.

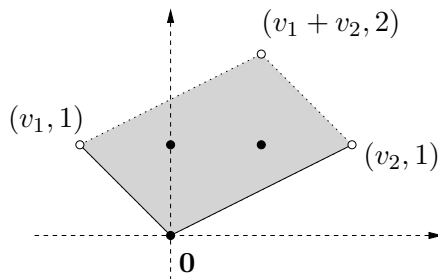
I denna figur är $v_1 = -1$ och $v_2 = 2$ men resonemanget gäller i allmänhet. Låt oss först studera, istället för mängden Q , mängden

$$R = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 \leq 1\}$$

där vi i olikheten $0 \leq r_1, r_2 < 1$ även tillåter att $r_1, r_2 = 1$. Eftersom varje punkt i R är en summa av en punkt på linjesegmentet mellan $\mathbf{0}$ och $(v_1, 1)$ och en punkt på linjesegmentet mellan $\mathbf{0}$ och $(v_2, 1)$ så följer det att R är parallelogrammen med hörn i $(0, 0)$, $(v_1, 1)$, $(v_2, 1)$ och $(v_1 + v_2, 2)$. Skillnaden mellan Q och R är att punkter $r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ med r_1 eller r_2 lika med 1 ligger i R men inte i Q . Det betyder att Q är parallelogrammen R utan de hörn och kanter som utgör "taket" av R enligt nedan.



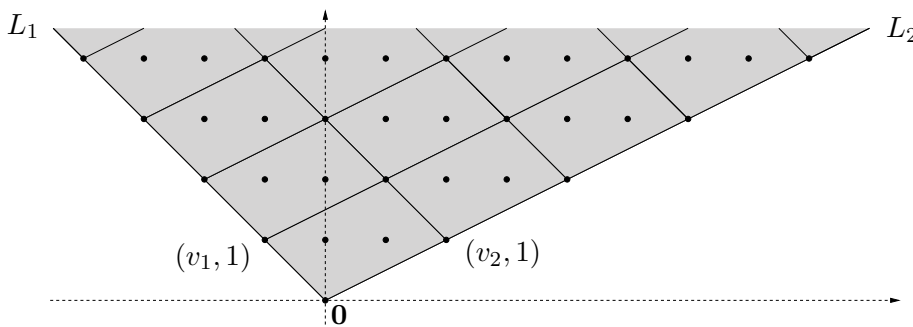
Figur 6.3: Parallelogrammen R med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(v_1, 1)$, $(v_2, 1)$ och $(v_1 + v_2, 2)$



Figur 6.4: Mängden Q , där de streckade kanterna och ihåliga hörnen ej är med i mängden

Anmärkning 6.3.2. Ordet *parallelogram* är "undantaget som bekräftar regeln" vad gäller svensk grammatik. Det heter *en* parallelogram så i singular bestämd form blir det "Den här parallelogrammen". I plural blir det "Flera parallelogrammer" och i bestämd form "De där parallelogrammerna".

Från följande figur ser vi att oändligt många kopior av parallelogrammen R täcker hela konen över P om vi placerar dessa som nedan.



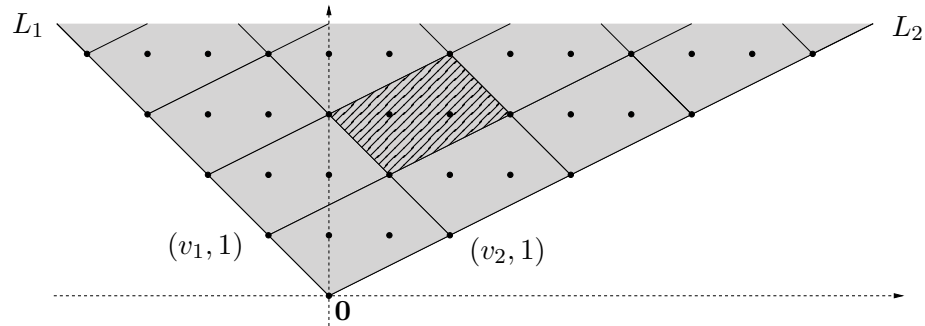
Figur 6.5: Kopior av parallelogrammen R täcker konen över P

I Övning 6.7 visas att varje gitterpunkt \mathbf{x}_1 på linjen $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ är på formen $\mathbf{x}_1 = n_1(v_1, 1)$ för något $n_1 \in \mathbb{N}$. På samma sätt är varje gitterpunkt \mathbf{x}_2 i $L_2 = \text{Kon}(v_2)$ på formen $\mathbf{x}_2 = n_2(v_2, 1)$ för något $n_2 \in \mathbb{N}$. Man kan också visa att en gitterpunkt på formen

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1),$$

där \mathbf{p} är en gitterpunkt i R är precis punkten \mathbf{p} fast i en förflyttad kopia av R . Vidare bestämmer varje val av talen n_1 och n_2 en unik kopia av R och vice

versa. I konen vi ritat är $v_1 = -1$ och $v_2 = 2$ och om till exempel $n_1 = 1$ och $n_2 = 1$ så är $n_1 \cdot (v_1, 1) + n_2 \cdot (v_2, 1) = 1 \cdot (-1, 1) + 1 \cdot (2, 1) = (1, 2)$ vilket motsvarar den markerade parallelogrammen nedan.



Vi kan därmed räkna upp alla gitterpunkter i konen över P genom att räkna antalet gitterpunkter i varje kopia av R . Det enda problemet är att vi då skulle dubbelräkna de gitterpunkter som ligger på randen av minst två kopior av R . Tar vi bort delar av randen av R så att dubbelräkning inte uppstår erhåller vi mängden Q . Låt oss nu bevisa detta.

Bevis av Hjälpsats 6.3.1. Vi börjar med att notera att vi från Övning 6.7 kan skriva $\mathbf{x}_1 = n_1(v_1, 1)$ och $\mathbf{x}_2 = n_2(v_2, 1)$ för $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Vi visar nu satsen i två steg. Först visar vi att varje gitterpunkt \mathbf{x} i konen kan skrivas på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$. Sedan måste vi visa att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ faktiskt är en gitterpunkt i konen över P .

Tag en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i konen $\text{Kon}(P)$. Då är

$$(x_1, x_2) = k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1)$$

för ett unikt val av reella tal $k_1, k_2 \geq 0$. Eftersom k_1 är ett reellt tal kan vi dela upp det i dess heltalsdel n_1 och dess decimaltalsdel $0 \leq r_1 < 1$ så att

$$k_1 = n_1 + r_1.$$

Till exempel är $5.27 = 5 + 0.27$. På samma sätt är $k_2 = n_2 + r_2$, där $n_2 \in \mathbb{N}$ och $0 \leq r_2 < 1$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x_1, x_2) &= k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1) = (n_1 + r_1)(v_1, 1) + (n_2 + r_2)(v_2, 1) = \\ &= (n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)) + (r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)) = \mathbf{v} + \mathbf{p} \end{aligned}$$

där vi infört notationen $\mathbf{v} = n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ och $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$. Vi ser att \mathbf{v} är en gitterpunkt då dess koordinater är summor av produkter av heltal. Vidare har vi att punkten $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ per definition är en punkt i mängden Q . Då \mathbf{p} är en differens av två gitterpunkter, $\mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{v}$, så följer det även att \mathbf{p} är en gitterpunkt. Därmed har vi att \mathbf{p} är en gitterpunkt i Q . Således har vi visat att en godtycklig gitterpunkt \mathbf{x} i konen över P kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$$

där $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ och \mathbf{p} är en gitterpunkt i Q .

Slutligen måste vi visa att varje element på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ verkligen ligger i konen också. Detta görs i Övning 6.9. \square

Sats 6.3.3. *Låt $P = \mathbf{K}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^1$ vara ett linjesegment. Om $L_1 = \text{Kon}(v_1)$ och $L_2 = \text{Kon}(v_2)$ så gäller att*

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2 < 1\}$.

Bevis. Eftersom det gäller att $s^x \cdot s^y = s^{x+y}$ och $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$ så är detta enbart en omformulering av Hjälpsats 6.3.1. \square

Anmärkning 6.3.4. Man kan visa att metoden som används i beviset av Hjälpsats 6.3.1 fungerar i större generalitet. Genom att göra detta kan man se att det finns en motsvarighet till Sats 6.3.3 för trianglar i \mathbb{R}^2 där Q svarar mot en *parallelepiped*. På samma sätt finns en motsvarande sats för tetraedrar i \mathbb{R}^3 . Den senare kommer vi behöva för att bevisa Ehrharts sats för gitterpolyedrar. Skillnaden mot Sats 6.3.3 är enbart att beviset blir beräkningstekniskt tyngre eftersom en tetraeder har fyra hörnpunkter i dimension tre till skillnad från ett linjesegment som har två hörnpunkter i dimension ett. Då själva idén bakom beviset är identiskt med beviset av Sats 6.3.3 har vi valt att placera beviset i Appendix A.2.

Sats 6.3.5. *Låt T vara en tetraeder med hörnen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och \mathbf{v}_4 . Om vi inför $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ så gäller att*

$$S_{\text{Kon}(T)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Bevis. Se Sats A.2.2. \square

Sätter vi samman Sats 6.2.9 och Sats 6.3.5 får vi följande resultat som vi i Kapitel 7 kommer använda för att visa att Ehrhartfunktionen är ett polynom.

Följdsats 6.3.6. *Låt T vara en tetraeder med hörn i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och \mathbf{v}_4 . Då gäller att*

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1-t)^4},$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Bevis. Från Sats 6.2.9 har vi att $\text{Ehr}_T(t) = S_{\text{Kon}(T)}(1, t)$ och från Sats 6.3.5 har vi att

$$S_{\text{Kon}(T)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$. Vi noterar nu att det enligt Övning 6.7 gäller att

$$S_{L_i}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Enligt Exempel 4.2.10 får vi därmed att

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_T(t) &= S_{\text{Kon}(T)}(1, t) = \\ &= S_Q(1, t) \cdot S_{L_1}(1, t) \cdot S_{L_2}(1, t) \cdot S_{L_3}(1, t) \cdot S_{L_4}(1, t) = \\ &= S_Q(1, t) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right)^4 = \frac{S_Q(1, t)}{(1-t)^4}. \quad \square \end{aligned}$$

Övningar

Övning 6.1 (★). Låt $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{y} = (4, 5, 6)$. Vad är $s^{\mathbf{x}}$ respektive $s^{\mathbf{y}}$? Beräkna $s^{\mathbf{x}} \cdot s^{\mathbf{y}}$ och $S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s)$.

Övning 6.2 (★). Låt K vara kuben från Exempel 4.4.2. Skriv ut termerna i summan $S_K(s)$.

Övning 6.3 (★★). Låt P vara triangeln $\mathbf{K}((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ och låt n vara ett positivt heltal. Visa att $S_{nP}(s)$ är summan av uttryck av typen $s^{(x_1, x_2)} = s_1^{x_1} s_2^{x_2}$ så att $x_1, x_2 \geq 0$ och $x_1 + x_2 \leq n$.

Övning 6.4 (★★). Gör klart beviset av Sats 6.1.4 genom att visa att $nP \subseteq M$.

Övning 6.5 (★). Vilken parallelogram motsvarar mängden

$$\{\mathbf{p} + 1 \cdot (v_1, 1) + 2 \cdot (v_2, 1) \mid \mathbf{p} \in Q\}$$

i Figur 6.5?

Övning 6.6 (★★). Beskriv "taket" av R i Exempel 6.4. Det vill säga, beskriv $R \setminus Q$ som en mängd.

Övning 6.7 (★★★). Tag en gitterpunkt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ med $d \geq 1$. Visa att gitterpunkterna i $\text{Kon}(\mathbf{v})$ är $(0\mathbf{v}, 0), (\mathbf{v}, 1), (2\mathbf{v}, 2), \dots$. Använd detta för att visa att

$$S_{\text{Kon}(\mathbf{v})}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n\mathbf{v}} t^n \quad \text{och} \quad S_{\text{Kon}(\mathbf{v})}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Övning 6.8 (★★★). Beräkna $S_Q(s, t)$ och $S_Q(1, t)$ där Q är mängden

$$Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$$

från Sats 6.3.5 i fallet då

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Övning 6.9 (★★★). Gör klart beviset av Hjälpsats 6.3.1. Det vill säga, visa att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$, där \mathbf{p} är en gitterpunkt i Q och $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, ligger i konen $\text{Kon}(P)$.

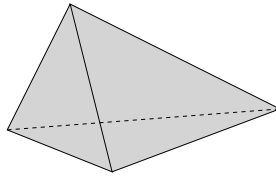
7 Ehrhartteori

I detta kompendiums sista kapitel är vi nu redo att visa Ehrharts sats för gitterpolyedrar. Vi börjar med att förklara trianguleringar av polyedrar, det vill säga tekniken att dela in en polyedrar i ett antal tetraedrar. Detta använder vi sedan för att visa Ehrharts sats. Det finns flera resultat som vi får som följer av denna sats och vi avslutar med att ge några exempel på sådana. Till exempel får vi en enkel formel för att beräkna volymen av en gitterpolyeder P i termer av antalet gitterpunkter i P , $2P$ och $3P$.

7.1 Trianguleringar av polyedrar

När vi i Kapitel 2 bevisade Hjälpssats 2.2.8 så använde vi att varje polygon kan trianguleras – det vill säga att varje polygon kan skrivas som en union av trianglar. Detta medförde att det räckte att visa påståendet för trianglar samt att påståendet var sant i skärningen av två trianglar. Denna metod är i själva verket en vanlig strategi för att bevisa mer involverade satser i matematik. Först visar man att komplicerade objekt kan byggas upp av enklare objekt. Därefter visar man det resultat man vill bevisa är giltigt för de enklare objekten. Slutligen bevisar man att om resultatet är sant för de enklare objekten så är det också sant när objekten sätts samman.

Motsvarigheten i tre dimensioner till att dela in en polygon i trianglar är att dela in en polyeder i tetraedrar.



På grund av analogin i dimension två kallas även en uppdelning av en polyeder P i tetraedrar för en triangulering av P . En stor skillnad mellan två och tre dimensioner är att beviset för att det är möjligt att triangulera alla polyedrar är avsevärt mycket mer komplicerat än beviset för att det går att triangulera alla polygoner. För en polygon så kunde vi välja ett hörn och dra linjer från det hörnet till alla andra hörn för att konstruera trianguleringen. En liknande metod finns för polyedrar som vi förklarar nedan men att visa att detta alltid fungerar är omständligt och lämnas till Appendix A.3.

Vi börjar med att rigoröst definiera vad en triangulering är i dimension tre.

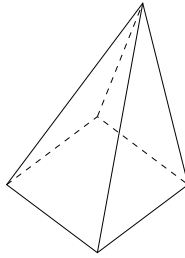
Definition 7.1.1. Låt P vara en polyeder. Vi säger att en ändlig mängd $\Delta = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ av tetraedrar är en *triangulering* av P om mängden Δ har följande två egenskaper:

- (i) $P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$,
- (ii) För varje par av distinkta tetraedrar $T_1, T_2 \in \Delta$ är skärningen $T_1 \cap T_2$ en sida av både T_1 och T_2 .

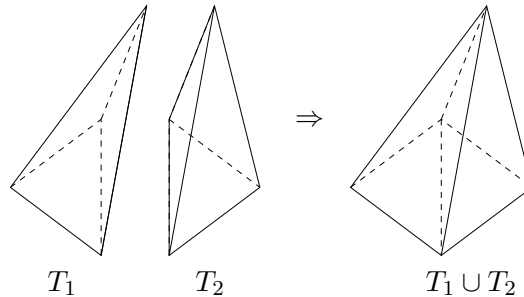
Ovanstående definition kan kanske vid första anblicken verka lite krånglig. Det den beskriver är en uppdelning av polyedern P i tetraedrar. I det första villkoret kräver vi att tetraedrarna verkligen fyller upp hela P och i det andra villkoret kräver vi att tetraedrarna inte överlappar med varandra.

Anmärkning 7.1.2. Den rigorösa definitionen för en triangulering av en polygon är identisk med ovanstående om man byter ut tetraedrar mot trianglar. Läsaren uppmuntras att försäkra sig om att trianguleringen i beviset av Hjälpssats 2.2.8 uppfyller denna definition.

Exempel 7.1.3. Betrakta följande pyramid.

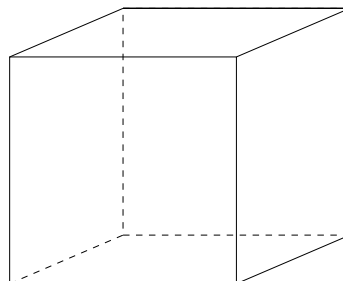


Denna polyeder kan trianguleras genom de två tetraedrarna som sätts samman som nedan.

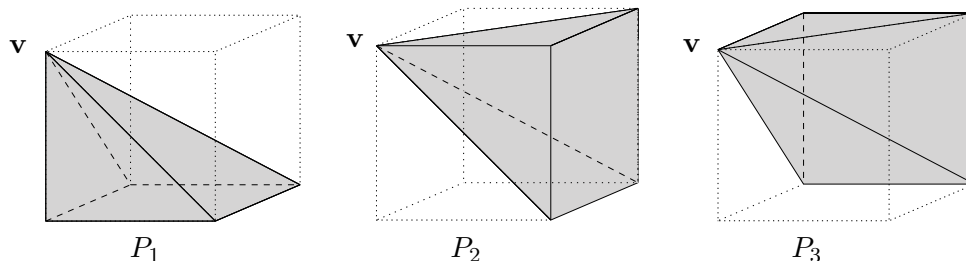


För att undersöka om denna triangulering är korrekt så behöver vi kontrollera att de båda kriterierna i Definition 7.1.1 är uppfyllda. Det första villkoret är uppfyllt eftersom unionen $T_1 \cup T_2$ av de båda tetraedrar T_1 och T_2 utgör hela pyramiden P . Vidare är det andra villkoret uppfyllt eftersom skärningen $T_1 \cap T_2$ är en triangel som är en sida i både T_1 och T_2 . ▲

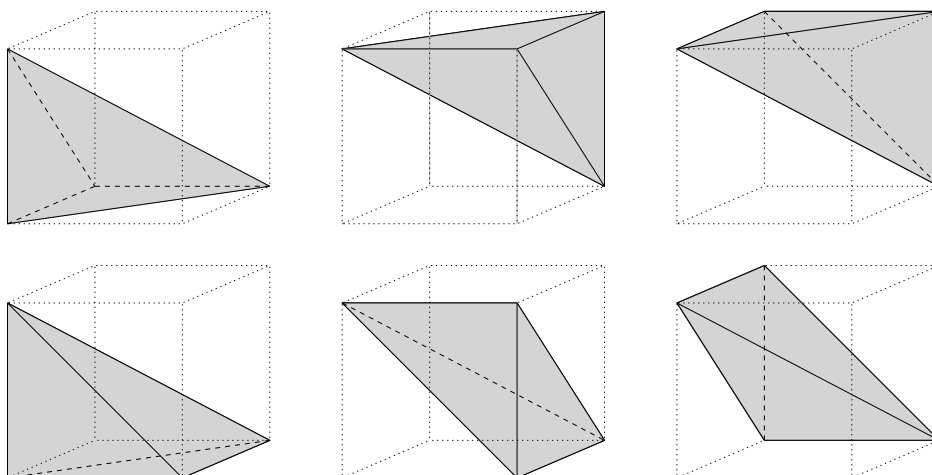
Exempel 7.1.4. Låt oss nu triangulera följande kub.



För att göra det börjar vi med att dela in kuben i tre stycken pyramider. Detta görs genom att välja ett hörn \mathbf{v} och dra linjer från \mathbf{v} till alla andra hörn i kuben. Detta delar in kuben i tre stycken pyramider P_1 , P_2 och P_3 .



Vi triangulerar nu vardera pyramid på samma sätt som i Exempel 7.1.3, vilket ger en fullständig triangulering av kuben.



Vi påstår alltså att den resulterande uppdelningen av kuben i tetraedrar är en triangulering. För att kontrollera det behöver vi återigen kontrollera de båda villkoren i Definition 7.1.1. Vi kan se att det första villkoret är uppfyllt eftersom dessa tetraedrar fyller hela kuben. För att kontrollera det andra villkoret behöver vi kontrollera att alla tetraedrar från olika pyramider skär varandra i en sida. Det finns 15 olika sådana par av tetraedrar och vi uppmanar läsaren att själv kontrollera att alla skärningar är på rätt form. ▲

En bra egenskap hos trianguleringarna i Exempler 7.1.3 och 7.1.4 är att varje hörn av en tetraeder i trianguleringen också är ett hörn av polyedern. Nästa sats säger att *varje* polyeder P kan trianguleras så att alla hörn i trianguleringen också är hörn i P . Idén bakom beviset är att generalisera hur vi använde trianguleringen i Exempel 7.1.3 för att triangulera kuben i Exempel 7.1.4. Vi delar alltså först upp vår polyeder i pyramider och visar sedan att pyramiderna kan trianguleras individuellt på ett sätt som också ger en triangulering av hela polyedern. Eftersom beviset av satsen är förvånansvärt omständligt medan påståendet med Exempel 7.1.4 i bakhuvudet förhoppningsvis är geometriskt rimligt har vi valt att förlägga beviset till appendix.

Sats 7.1.5. För varje polyeder P finns det en triangulering Δ av P så att för varje tetraeder $T \in \Delta$ är hörnen av T också hörn i P .

Bevis. Se Sats A.3.5. □

7.2 Ehrharts sats

Nu är vi redo att visa Ehrharts sats. Vi börjar med att visa satsen enbart för tetraedrar.

Hjälpsats 7.2.1. Låt T vara en tetraeder med hörn i gitterpunkter. Då är Ehrhartfunktionen $L_T(n)$ ett polynom i n av grad som mest 3.

Bevis. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och \mathbf{v}_4 vara hörnen i T och betrakta Ehrhartserien

$$\text{Ehr}_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_T(n)t^n$$

till T . Från Följdsats 6.3.6 har vi att

$$\text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1-t)^4}$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

Eftersom Q består av ändligt många gitterpunkter så är $S_Q(1, t)$ en ändlig summa och speciellt är $S_Q(1, t)$ ett polynom i t vars grad är lika med den maximala höjden av alla gitterpunkter i Q . Höjden av en punkt

$$r_1(\mathbf{x}_1, 1) + r_2(\mathbf{x}_2, 1) + r_3(\mathbf{x}_3, 1) + r_4(\mathbf{x}_4, 1)$$

i Q ges av punktens sista koordinat som är $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ med $0 \leq r_i < 1$ för $i = 1, 2, 3, 4$. Eftersom $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 4$ är den maximala höjden av alla gitterpunkter i Q som mest 3. Alltså har vi en likhet

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_T(n)t^n = \text{Ehr}_T(t) = \frac{S_Q(1, t)}{(1-t)^4}$$

där $S_Q(1, t)$ är ett polynom av grad som mest tre. Från Sats 5.3.4 följer det därmed att även $L_T(n)$ är ett polynom av grad som mest tre. □

Sats 7.2.2 (Ehrharts sats). Låt P vara en gitterpolyeder. Då är Ehrhartfunktionen $L_P(n)$ av P ett polynom i n av grad som mest 3.

Bevis. Från Sats 7.1.5 vet vi att det finns en triangulering Δ av P . För varje $n \in \mathbb{N}$ så är då $n\Delta = \{nT \mid T \in \Delta\}$ en triangulering av uppförstoringen nP . Därmed kan vi räkna antalet gitterpunkter i nP genom att summera antalet gitterpunkter i uppförstoringarna nT för alla $T \in \Delta$. Detta kommer dock medföra att vi dubbelräknar de gitterpunkter som ligger i skärningen av minst två tetraedrar. Vi har därför att

$$L_P(n) = \sum_{T \in \Delta} L_T(n) - q(n)$$

där $q(n)$ är en korrektionsterm som kommer av dubbelräkningen. För varje par av tetraedrar $T_1, T_2 \in \Delta$ så är $T_1 \cap T_2$ en sida av både T_1 och T_2 . Således är varje icke-tom skärning $T_1 \cap T_2$ antingen ett hörn, en kant eller en triangel.

- (i) Om $T_1 \cap T_2$ är ett hörn så är $L_{T_1 \cap T_2}(n) = 1$.
- (ii) Om $T_1 \cap T_2$ är en kant som innehåller m stycken gitterpunkter så är $L_{T_1 \cap T_2}(n) = (m - 1)n + 1$, se Övning 4.2.
- (iii) Om $T_1 \cap T_2$ är en triangel så har vi från Sats 4.1.6 att

$$L_{T_1 \cap T_2}(n) = An^2 + \frac{r}{2}n + 1$$

där A är triangelns area i det tvådimensionella gitter som innehåller den och r är antalet gitterpunkter längs med triangelns rand.

Notera att alla dessa uttryck är polynom i n av grad mindre än 3. Eftersom $q(n)$ är en ändlig summa av termer på formen ovan är $q(n)$ ett polynom. Nu följer resultatet från Hjälpsats 7.2.1 eftersom varje term i högerledet i

$$L_P(n) = \sum_{T \in \Delta} L_T(n) - q(n)$$

är ett polynom av grad som mest 3 och en summa av sådana är ett polynom av grad som mest 3. □

Anmärkning 7.2.3. I fortsättningen så kommer vi kalla Ehrhartfunktionen $L_P(n)$ för *Ehrhartpolynom* av en polyeder P . Vi kommer i Följdsats 7.3.5 se att Ehrhartpolynom $L_P(n)$ alltid är ett polynom av grad *precis* 3.

Exempel 7.2.4. I Exempel 4.4.2 beräknade vi Ehrhartpolynom för enhetskuben K till $L_K(n) = (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ vilket är ett tredjegrads-polynom i n . ▲

Sats 7.2.5. Låt P vara en gitterpolyeder och låt $L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ vara dess Ehrhartpolynom. Då gäller att $a_0 = 1$.

Bevis. Se Övning 7.2. □

Exempel 7.2.6. Låt T vara tetraedern

$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

I Kapitel 6 visade vi att Ehrhartfunktionen till T gavs av

$$L_T(n) = \binom{3+n}{3} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$$

genom att använda kombinatorik. Med hjälp av Ehrharts sats kan vi nu beräkna detta på ytterligare ett sätt. Den teknik vi presenterar här för att beräkna Ehrhartpolynom är mer räknetung än metoden vi såg i Kapitel 6 men den har istället den stora fördelen att samma angreppssätt fungerar för alla gitterpolyedrar.

Ehrharts sats säger att $L_T(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ för några koefficienter $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, och vi vill nu beräkna dessa tal. Från Sats 7.2.5 har vi att $a_0 = 1$. Genom att räkna efter ser vi att T innehåller 4 gitterpunkter så $L_T(1) = 4$. Detta ger oss följande ekvation:

$$\begin{aligned} 4 = L_T(1) &= a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + 1 \\ &\iff \\ a_1 &= 3 - a_2 - a_3, \end{aligned} \tag{7.1}$$

Genom att räkna antalet gitterpunkter i $2T$ ser vi vidare att

$$\begin{aligned} 10 = L_T(2) &= a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + 1 \\ &\iff \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 &= 9. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Använder vi (7.1) i (7.2) följer det att

$$\begin{aligned} 8a_3 + 4a_2 + 2(3 - a_2 - a_3) &= 9 \\ &\iff \\ a_2 = \frac{1}{2}(3 - 6a_3) &= \frac{3}{2} - 3a_3. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Från att räkna antalet gitterpunkter i $3T$ ser vi att

$$\begin{aligned} 20 = L_T(3) &= a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + 1 \\ &\iff \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 &= 19. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Genom att substituera in (7.1) och (7.3) i (7.4) fås att $a_3 = \frac{1}{6}$, vilket i sin tur ger att $a_2 = 1$ och $a_1 = \frac{11}{6}$, se Övning 7.3. Sammanfattningsvis har vi

$$L_T(n) = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 = \binom{3+n}{3}. \quad \blacktriangle$$

Man kan visa att tillvägagångssättet i Exempel 7.2.6 fungerar för alla gitterpolyedrar P . Ett sätt att göra det är att visa att ekvationerna som motsvarar ekvationerna (7.1)–(7.4) för en gitterpolyeder P , det vill säga ekvationssystemet

$$\begin{cases} L_P(1) = a_3 + a_2 + a_1 + 1, \\ L_P(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1, \\ L_P(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1, \end{cases}$$

alltid har en unik lösning. En teknik för att lösa linjära ekvationssystem som detta kallas för Gausselimination och är något man lär sig i *linjär algebra*. Vi refererar den intresserade läsaren till böcker i detta ämne, exempelvis kompendiet *Linjär Algebra - Tio förrätter och två efterrätter* som används i kursen Linjär algebra för gymnasister på KTH. Att lösa detta ekvationssystem ger följande resultat, vars bevis vi lämnar åt läsaren.

Sats 7.2.7. Låt P vara en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom

$$L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0.$$

Då är

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{1}{3}L_P(3) - \frac{3}{2}L_P(2) + 3L_P(1) - \frac{11}{6}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}L_P(3) + 2L_P(2) - \frac{5}{2}L_P(1) + 1, \\ a_3 &= \frac{1}{6}L_P(3) - \frac{1}{2}L_P(2) + \frac{1}{2}L_P(1) - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

7.3 Geometrin hos Ehrhartpolynomet

Vi har nu visat att funktionen som räknar antalet gitterpunkter i en gitterpolyeder ges av ett polynom och vi har i Sats 7.2.7 gett explicita uttryck för koefficienterna i polynomet. Dessa koefficienter är inte bara tal utan har även geometriska tolkningar. Vi börjar med att påminna oss om strukturen av Ehrhartpolynomet för en gitterpolygon i två dimensioner.

Exempel 7.3.1. För en gitterpolygon P har vi enligt Sats 4.1.6 att Ehrhartpolynomet har formen

$$L_P(n) = a_2n^2 + a_1n + 1$$

där a_2 är lika med arean av P och a_1 är hälften av antalet gitterpunkter på randen av P . ▲

Precis som för gitterpolygoner så reflekterar koefficienterna i Ehrhartpolynomet av en gitterpolyeder geometriska egenskaper hos polyedern.

Exempel 7.3.2. Låt oss återigen studera enhetskuben och tetraedern.

- (i) I Exempel 4.1.7 såg vi att Ehrhartpolynomet för enhetskuben K var lika med $L_K(n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, så i detta fall var $a_3 = 1$, $a_2 = 3$ och $a_1 = 3$. Vi noterar att volymen för enhetskuben ges av $1^3 = 1$ vilket är precis lika med a_3 .
- (ii) Från Följdsats 5.2.3 har vi att tetraedern T med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$ har Ehrhartpolynomet $L_T(n) = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1$, så $a_3 = \frac{1}{6}$. Man kan visa att volymen för tetraedern är precis $\frac{1}{6}$, vilket är lika med koefficienten a_3 . ▲

Anmärkning 7.3.3. Vi vill nedan visa att koefficienten a_3 i Ehrhartpolynomet för en gitterpolyeder P är precis lika med volymen av P . För att göra detta behöver vi egentligen en ordentlig definition för volymen av en tredimensionell kropp, vilket vi inte har. Av utrymmesskäl utelämnar vi denna teori, men ger en motiverande förklaring istället. Vi ber om läsarens överseende. Ett sätt att

beräkna volymen av ett objekt är att dela in objektet i mindre och enklare bitar och sedan addera volymerna av dessa. Varje tredimensionell kropp kan approximeras med en union av flera små kuber och ju mindre kuberna är desto bättre blir approximationen. Därmed fås en approximation av hela kroppens volym genom att summera kubernas volymer. Man kan visa att när man låter sidlängden av kuberna gå mot 0, och därmed låter antalet kuber gå mot oändligheten, så kommer approximationen av volymen att bli godtyckligt bra. Denna teori går igenom i grundkurser i analys, och den intresserade läsaren kan läsa om detta i exempelvis Persson och Böiers bok *Analys i flera variabler* (som har boken *Analys i en variabel* som förkunskapskrav). Nedan kommer vi använda att volymen av en tredimensionell kropp kan approximeras godtyckligt bra genom beskrivningen vi förklarade ovan.

Låt oss nu undersöka relationen mellan koefficienten a_3 i Ehrhartpolynomet och volymen av en gitterpolyeder P . Vi börjar med att ta ett positivt heltal n och låta $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ beteckna alla punkter i \mathbb{R}^3 vars koordinater har formen

$$\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}\right)$$

för några heltal $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Om $n = 1$ så får vi det vanliga gittret och om $n > 1$ blir $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ ett tätare rutnät än det vi ser i det vanliga gittret. För varje punkt \mathbf{x} i mängden $P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ kan vi skapa en kub med mittpunkt i \mathbf{x} och med sidlängd $\frac{1}{n}$. Denna samling av kuber kommer ge en approximation av polyedern P och vi kan från dessa approximera volymen av P . Om vi väljer n att vara stor så kommer sidlängden av kuberna att bli liten och skillnaden mellan volymen av P och den sammanlagda volymen av kuberna bli mindre. Antalet kuber är lika med antalet punkter i $P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ och vi betecknar detta antal med $\left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right|$. Då varje kub har volymen $\frac{1}{n^3}$ blir därför kubernas sammanlagda volym lika med

$$\frac{1}{n^3} \cdot \left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right| \approx \text{Vol}(P).$$

Vi observerar nu att $(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}) \in P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3$ om och endast om (x_1, x_2, x_3) är en gitterpunkt i nP . Detta är sant eftersom man kan tolka nP som mängden av punkter (x_1, x_2, x_3) så att $(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \frac{x_3}{n}) \in P$. Därför måste det gälla att $\left|P \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})^3\right| = L_P(n)$ så det följer att

$$\text{Vol}(P) \approx \frac{1}{n^3} L_P(n)$$

där approximationen kan fås godtyckligt bra genom att välja större och större n . Enligt Ehrharts sats vet vi att $L_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ för några konstanter a_0, a_1, a_2 och a_3 . Därmed fås att

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P) &\approx \frac{1}{n^3} (a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0) = a_3 \frac{n^3}{n^3} + a_2 \frac{n^2}{n^3} + a_1 \frac{n}{n^3} + a_0 \frac{1}{n^3} \\ &= a_3 + a_2 \frac{1}{n} + a_1 \frac{1}{n^2} + a_0 \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Om vi nu låter n bli större och större så kommer värdet av $a_2\frac{1}{n} + a_1\frac{1}{n^2} + a_0\frac{1}{n^3}$ bli närmare och närmare noll samtidigt som approximationen med volymen blir mer och mer exakt. Med andra ord, när n blir större så kommer a_3 vara en bättre och bättre approximation av kubernas totala volym samtidigt som kubernas totala volym blir en bättre och bättre approximation av volymen av P . Eftersom vi kan göra n godtyckligt stort så drar vi följande slutsats.

Sats 7.3.4. *Låt P vara en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom*

$$L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0.$$

Då är a_3 lika med volymen av P .

Följsats 7.3.5. *Låt P vara en gitterpolyeder. Då är Ehrhartpolynomet $L_P(t)$ ett polynom av grad precis 3.*

Bevis. Eftersom volymen av en polyeder är större än 0 så följer det att $a_3 > 0$ vilket implicerar att $L_P(n)$ är ett tredjegradspolynom. \square

Vi har nu sett att $a_3 = \text{Vol}(P)$. Man kan till och med visa följande: Om P är en gitterpolyeder med Ehrhartpolynom $L_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$ så gäller att

- (i) a_3 är lika med volymen av P ,
- (ii) a_2 är lika med hälften av arean av fasetterna av P mätt i de tvådimensionella gitter som innehåller dem,
- (iii) $a_1 = ?$,
- (iv) $a_0 = 1$.

Notera här att ingen har hittat en bra geometrisk förklaring av koefficienten a_1 i Ehrhartpolynomet och matematiker håller än idag på och forskar i ämnet.

Som en avslutning på teorin om Ehrhartpolynomet kan vi med Sats 7.2.7 och Sats 7.3.4 ge en formel för volymen av en gitterpolyeder som enbart beror på antalet gitterpunkter hos polyedern och två av dess uppförstorningar.

Sats 7.3.6. *Låt P vara en gitterpolyeder. Då har vi att*

$$\text{Vol}(P) = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6}.$$

Anmärkning 7.3.7. I Sats 4.1.6 visade vi att Ehrhartfunktionen av en gitterpolygon var lika med ett andragradspolynom och att arean av polygonen var lika med koefficienten framför högstgradstermen i samma polynom. För en gitterpolyeder har vi nu i Sats 7.2.2 visat att dess Ehrhartfunktion är ett tredjegradspolynom där högstgradskoefficienten svarar mot polyederns volym. Vi vill avsluta detta kompendium med att prata om Ehrharts sats i högre dimensioner. Först noterar vi att alla definitioner vi gjort har varit för godtyckliga

gitterpolytober i godtyckliga dimensioner, såsom Ehrhartfunktionen och konen över en polytop. Det visar sig att Ehrhartfunktionen till en d -dimensionell gitterpolytop ges av ett polynom av grad d vars högstgradskoefficient svarar mot polytopens d -dimensionella volym. Man skulle kunna tro att detta bevis är väldigt krångligt, men vi har nästan fullgjort beviset för detta redan. Alla satser vi visat för polyedrar kan generaliseras till godtyckliga polytober, och beviset av denna generalisering går i praktiken ut på att byta ut siffran 3 mot talet d . Dock måste man visa att d -dimensionella polytober kan trianguleras vilket är tekniskt och svårt att visualisera. Läsaren uppmuntras dock att gå igenom satserna vi gett om polyedrar och försöka se om beviset håller med 3 utbytt mot d istället. Detta är en av krafterna i abstrakt matematik. Genom att visa påståenden för saker man kan visualisera kan man på köpet även visa dem för svårare objekt även om man inte ens kan tänka på, eller förstå, dem.

Övningar

Övning 7.1 (★). Kontrollera att mängden av tetraedrar i Exempel 7.1.4 är en triangulering. Det vill säga, kontrollera att varje icke-tom skärning av par av tetraedrar skär varandra i ett hörn, en kant eller en fasett.

Övning 7.2 (★★). Visa Sats 7.2.5.

Övning 7.3 (★). Gör klart beräkningarna för a_3, a_2, a_1 och a_0 i Exempel 7.2.6.

Övning 7.4 (★★). Använd Sats 7.3.6 för att visa att tetraedern

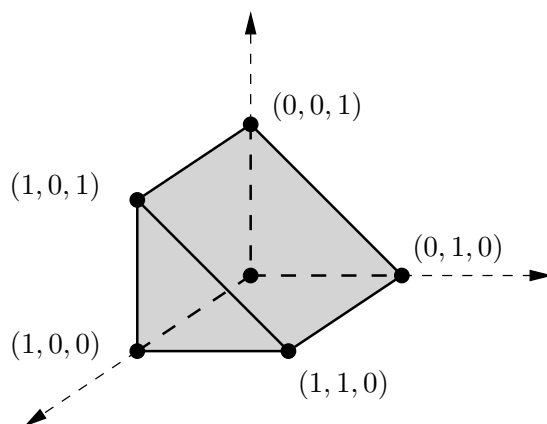
$$T = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

har volym $\frac{1}{6}$.

Övning 7.5 (★). Använd metoden som beskrivs i Exempel 7.1.4 för att triangulera polyedern

$$P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1))$$

som illustreras nedan.



Övning 7.6 (★★). Bestäm Ehrhartpolynomet och Ehrhartserien för polytopen P från Övning 7.5.

Övning 7.7 (***). Polyedern

$$P = \mathbf{K}((1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$$

är en pyramid.

- (i) Använd Övning 7.4 för att visa att P har volymen $\frac{4}{6}$.
- (ii) Beräkna $L_P(1)$, $L_P(2)$ och $L_P(3)$. (*Ledning:* Beräkna först $L_P(1)$ och $L_P(2)$. Använd därefter Sats 7.3.6.)
- (iii) Vad är Ehrhartpolynomet för pyramiden P ?

Övning 7.8 (***). I Anmärkning 7.3.7 påstod vi att Ehrhartfunktionen till en d -dimensionell gitterpolytop är ett polynom av grad d för alla positiva heltal d . Speciellt gäller det för $d = 1$. En endimensionell gitterpolytop är ett linjesegment mellan två gitterpunkter. Bevisa Ehrharts sats för en endimensionell gitterpolytop P i \mathbb{R}^1 . Vad är den geometriska förklaringen av högstagskoefficienten hos Ehrhartpolynomet för P ?

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1.

- (i) $B \cup C = A$.
- (ii) $B \cap C = \emptyset$.
- (iii) $D \cap C = \{4, 36\}$.
- (iv) $\{x \in D \mid x \in B\} = D \cap B = \{1, 19, 101\}$.
- (v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.
- (vi) $\{x + 1 \mid x \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.

Övning 1.3. Tag $x \in \mathbb{N}$, det vill säga att x är något av talen $1, 2, 3, \dots$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \dots, x\} = B_x$ och därmed $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Eftersom x var godtycklig visar detta att $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

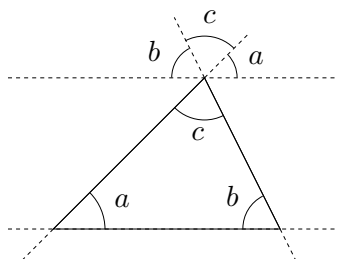
Omvänt, antag att $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Det betyder att det finns ett heltal $n \geq 1$ så att $x \in B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. I synnerhet gäller $x \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. Detta visar att $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$.

Eftersom båda inklusioner $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ och $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$ gäller kan vi dra slutsatsen att $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$.

Övning 1.5. Alla utom "Mängden av de naturliga talen" är påståenden. Det enda påståendet för vilket vi kan avgöra om det är sant eller falskt är "Varje mängd innehåller minst ett element", och detta påstående är falskt eftersom den tomma mängden inte innehåller något element.

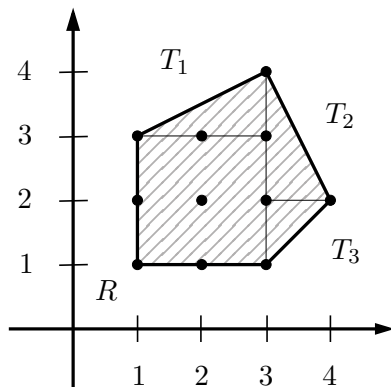
Övning 1.7. Vi visar att om en punkt $\mathbf{x} \in M$ inte är en inre punkt så måste \mathbf{x} vara en randpunkt. Låt därför $\mathbf{x} \in M$ och antag att \mathbf{x} inte är en inre punkt. Från definitionen av en inre punkt följer då att för varje cirkelskiva C med \mathbf{x} som mittpunkt gäller att $C \not\subseteq M$. Det betyder att det finns punkter i C som inte ligger i M , det vill säga $C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$. Eftersom $\mathbf{x} \in C$ och $\mathbf{x} \in M$ gäller också att $C \cap M \neq \emptyset$. Då detta gäller för alla cirkelskivor med \mathbf{x} som mittpunkt så följer att \mathbf{x} är en randpunkt.

Övning 1.9. Vi döper vinklarna i figuren enligt nedan. De vinklar som har samma namn är lika stora enligt den egenskap som refereras till i uppgiftslydelsen.



Högst upp i figuren ser vi att vinkeln $a + b + c$ är ett halvt varv, därför är $a + b + c = 180^\circ$.

Övning 2.1. Vi delar in polygonen från Exempel 2.2.1 i rektanglar och trianglar enligt nedan.

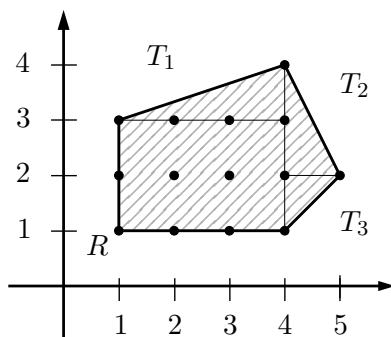


Rektangeln har area 4 medan

$$\text{Area}(T_1) = \text{Area}(T_2) = 1 \text{ och } \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2}.$$

Därför har polygonen area lika med $4 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

Vi delar in polygonen från Exempel 2.2.2 i rektanglar och trianglar enligt nedan.



Rektangeln har area 6 medan

$$\text{Area}(T_1) = \frac{3}{2}, \text{Area}(T_2) = 1 \text{ och } \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2}.$$

Därför har polygonen area lika med $6 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 9$.

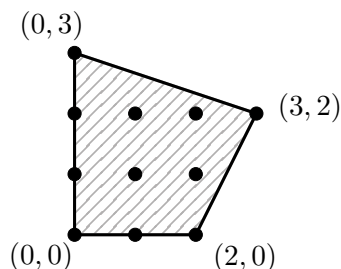
Övning 2.3. Om \mathbf{x} är ett hörn i P så är vikten $v_P(\mathbf{x}) = \frac{\theta}{360^\circ}$ där θ är vinkeln i \mathbf{x} . Låt nu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vara hörnen i P . Då gäller att

$$v_P(\mathbf{x}_1) + v_P(\mathbf{x}_2) + \dots + v_P(\mathbf{x}_n) = \frac{\theta_1}{360^\circ} + \frac{\theta_2}{360^\circ} + \dots + \frac{\theta_n}{360^\circ} = \frac{\theta_1 + \dots + \theta_n}{360^\circ}$$

där θ_i är vinkeln i hörnet \mathbf{x}_i . Från Sats 1.4.1 följer att $\theta_1 + \dots + \theta_n = 180^\circ \cdot (n-2)$ så

$$v_P(\mathbf{x}_1) + v_P(\mathbf{x}_2) + \dots + v_P(\mathbf{x}_n) = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{360^\circ} = \frac{n-2}{2}.$$

Övning 2.5. Då varje hörn är en multipel av $\sqrt{2}$ kan man tänka sig att polygonen är en gitterpolygon P som har skalats upp med faktorn $\sqrt{2}$. Om vi betraktar polygonen P innan uppskalningen måste P vara följande gitterpolygon



Vi noterar att P har 4 inre gitterpunkter och 7 stycken gitterpunkter på sin rand. Därmed har vi att $\text{Area}(P) = 4 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{13}{2}$. När vi skalar upp P med faktorn $\sqrt{2}$ så kommer arean av P att öka med en faktor $(\sqrt{2})^2 = 2$. Därmed har vi att arean av den ursprungliga polygonen ges av

$$(\sqrt{2})^2 \text{Area}(P) = 2 \frac{13}{2} = 13.$$

Övning 2.7. Vi börjar med att införa lite notation. Kalla de båda konvexa polygonerna P_1 och P_2 och deras sammansättning för P . Låt i_1 och i_2 vara antalet inre gitterpunkter i P_1 respektive P_2 . På samma sätt låter vi r_1 och r_2 vara antalet gitterpunkter på randen av P_1 respektive P_2 . Vi låter också i vara antalet inre gitterpunkter i sammansättningen P och r att vara antalet gitterpunkter på randen till P .

Låt k vara antalet gitterpunkter som ligger på det linjesegment i vilken P_1 och P_2 har satts samman men som inte är randpunkter i P . Antalet inre punkter i P är då $i = i_1 + i_2 + k$. Vi ser också att antalet gitterpunkter på randen av P är lika med $r = r_1 + r_2 - 2k - 2$. Detta är sant eftersom hörnen på kanten i vilken P_1 och P_2 sätts samman är randpunkter i både P_1 och P_2 . Med detta i bakhuvudet gör vi nu följande beräkning med hjälp av Picks sats för P_1 och P_2 .

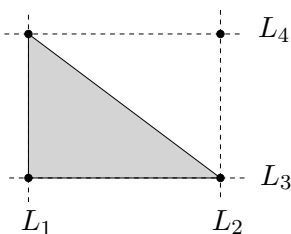
$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2) = i_1 + \frac{r_1}{2} - 1 + i_2 + \frac{r_2}{2} - 1 = \\ &= i_1 + i_2 + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 = i_1 + i_2 + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 + k - k = \\ &= \underbrace{i_1 + i_2 + k}_{=i} + \frac{r_1 + r_2}{2} - 2 - \frac{2k}{2} = i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - 2 = \\ &= i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - 1 - 1 = i + \frac{r_1 + r_2 - 2k}{2} - \frac{2}{2} - 1 = \\ &= i + \underbrace{\frac{r_1 + r_2 - 2k - 2}{2}}_{=r/2} - 1 = i + \frac{r}{2} - 1. \end{aligned}$$

Övning 2.9. Definiera rektangeln R på det sätt som beskrivs i ledningen. Vi noterar först att hörnen i R är punkterna

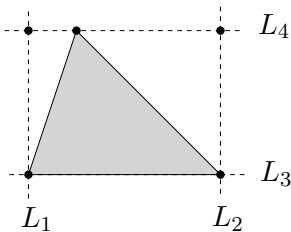
$$(x_1^{\min}, x_2^{\min}), (x_1^{\max}, x_2^{\min}), (x_1^{\min}, x_2^{\max}) \text{ och } (x_1^{\max}, x_2^{\max})$$

där x_i^{min} och x_i^{max} är den minsta respektive maximala x_i -koordinaten för hörnen i P för $i = 1, 2$. Eftersom P har tre hörn och samma hörn inte kan ha både det största och minsta värdet på x_i -koordinaten bland hörnen följer att åtminstone ett av hörnen i P måste ligga i ett hörn av triangeln. Vi får därför tre fall: Första fallet är att alla tre hörn i P också är hörn i R . Det andra fallet är att precis två av hörnen i P är hörn i R . Fall tre är att bara ett hörn i P är ett hörn i R .

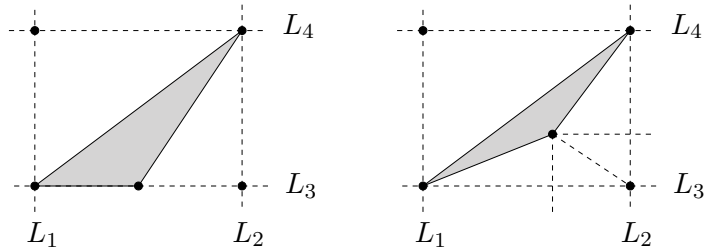
Om alla tre hörnen av P också är hörn i R kan vi, efter att eventuellt ha roterat P , anta att hörnen i P är (x_1^{min}, x_2^{min}) , (x_1^{max}, x_2^{min}) och (x_1^{min}, x_2^{max}) . Vi är därför i följande situation och ser från bilden att R är unionen av två rätvinkliga trianglar.



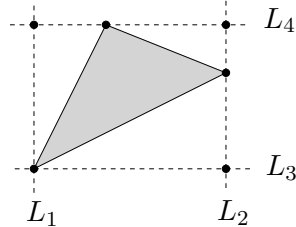
Om precis två hörn \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 i P också är hörn i R finns det två möjligheter. Antingen ligger \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 på samma kant i R eller så gör de inte det. Om \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 ligger på samma kant i R kan vi, efter att eventuellt ha roterat P , anta att hörnen är $\mathbf{v}_1 = (x_1^{min}, x_2^{min})$ och $\mathbf{v}_2 = (x_1^{max}, x_2^{min})$. Då måste det tredje hörnet i P ligga på linjen L_4 . Eftersom det tredje hörnet \mathbf{v}_3 i P *inte* var ett hörn av R så måste vi vara i följande situation. Vi ser från bilden att R är unionen av P och två rätvinkliga trianglar (notera att varje val av \mathbf{v}_3 på L_3 som inte är ett hörn av R ger en liknande struktur).



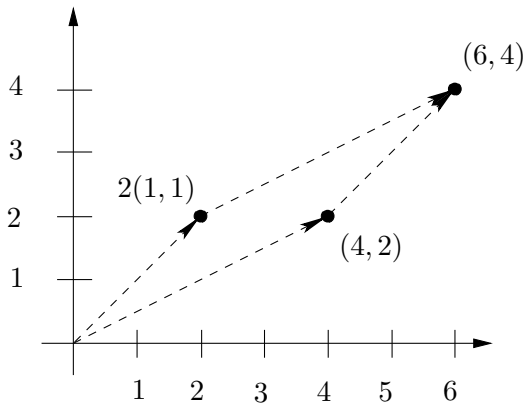
Om \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 inte ligger på samma kant i R kan vi anta att $\mathbf{v}_1 = (x_1^{min}, x_2^{min})$ och $\mathbf{v}_2 = (x_1^{max}, x_2^{max})$. Det finns nu två möjligheter. Antingen ligger det tredje hörnet \mathbf{v}_3 i P på en kant i R eller så gör det inte det. Vi får därför någon av följande två fall och ser från bilderna att R är unionen av P och två eller fem rätvinkliga trianglar (notera återigen att den precisa placeringen av \mathbf{v}_3 inte spelar någon roll för strukturen).



Det sista fallet är att endast ett av hörnen av P är ett hörn i R . Då kan vi anta att det hörnet är (x_1^{min}, x_2^{min}) . De två övriga hörnen måste då ha x_1 -koordinat lika med x_1^{max} respektive x_2 -koordinat lika med x_2^{max} . Om samma hörn skulle ha både x_1 -koordinat lika med x_1^{max} och x_2 -koordinat lika med x_2^{max} så skulle det hörnet också vara ett hörn i R vilket skulle betyda att vi är i det tidigare fallet där två hörn av P var hörn i R . Nu är dock bara ett hörn av P ett hörn av R . Därför måste ett hörn i P ligga på linjen L_2 och det andra hörnet ligga på linjen L_4 . Det betyder att vi är i följande situation och vi ser att R är unionen av P och tre rätvinkliga trianglar (de precisa placeringarna av de två hörnen är återigen oviktiga för strukturen).



Övning 3.1. (i) Vi har att $(4, 2) + 2(1, 1) = (4, 2) + (2, 2) = (6, 4)$. Den geometriska lösningen ges nedan:



(ii) Här gäller att

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) - 3(2, 0, 1) + 4(0, 0, 1) &= (1, 1, 1) - (6, 0, 3) + (0, 0, 4) = \\ &= (1 - 6 + 0, 1 - 0 + 0, 1 - 3 + 4) = (-5, 1, 2). \end{aligned}$$

Övning 3.3. Vi visar att dessa två mängder är lika genom att visa att de är delmängder av varandra.

Tag en punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Då är $\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ med $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Om vi inför $\lambda_{n+1} = 0$ ser vi att

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \underbrace{\lambda_{n+1} \mathbf{x}}_{=0}$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \geq 0$ och

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + 0 = 1.$$

Därmed har vi att $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$. Eftersom detta gäller för alla punkter \mathbf{p} i $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ följer det att

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}).$$

Vi vill nu visa att $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Tag därför en punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$. Då är

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{x}$$

för några $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ med $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Då $\mathbf{x} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ så har vi att

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n$$

för några $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ och $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$. Därmed gäller att

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{x} = \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n + \lambda_{n+1} (k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n) = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_{n+1} k_1) \mathbf{x}_1 + (\lambda_2 + \lambda_{n+1} k_2) \mathbf{x}_2 + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1} k_n) \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Vi inför nu $\mu_i = \lambda_i + \lambda_{n+1} k_i$ för alla $i = 1, 2, \dots, n$. Då gäller att $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ och

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n &= \lambda_1 + \lambda_{n+1} k_1 + \lambda_2 + \lambda_{n+1} k_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} k_n = \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \underbrace{(k_1 + \dots + k_n)}_{=1} = \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Det betyder att $\mathbf{p} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Eftersom detta är sant för alla punkter i $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x})$ drar vi slutsatsen att

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Vi har alltså visat att dessa mängder är delmängder av varandra vilket måste betyda att de är lika, det vill säga att

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

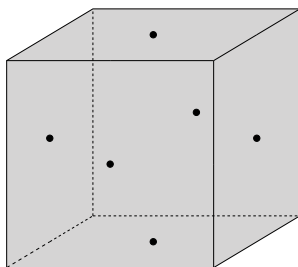
Övning 3.5. För att få enkla koordinater att jobba med låter vi K vara kuben med hörn i alla gitterpunkter (x_1, x_2, x_3) vars koordinater x_i ligger i mängden $\{1, -1\}$. Det vill säga att

$$K = \mathbf{K} \left((1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), \right. \\ \left. (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1) \right).$$

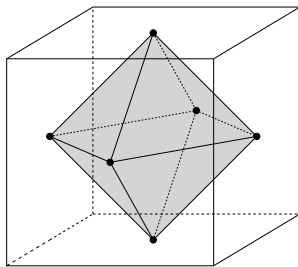
Då utgörs mittpunkterna av fasetterna i K av mängden

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$$

enligt figuren nedan.



Genom att dra linjesegment mellan dessa punkter ser vi att konvexa höljet av dessa punkter blir en regelbunden oktaeder. Därmed är dualen till en kub en regelbunden oktaeder. Vi illustrerar detta nedan.



Övning 3.7. Tag $\mathbf{x} \in P$. Då finns det $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5 \geq 0$ och $\lambda_1 + \dots + \lambda_5 = 1$ så att

$$\mathbf{x} = \lambda_1(0, 0, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 0, 0) + \lambda_4(0, 0, 1, 0) + \lambda_5(0, 0, 0, 1) = \\ = (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5).$$

Om \mathbf{x} ska vara en gitterpunkt så måste $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ och λ_5 alltså vara heltal. Eftersom $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$ så ger sambandet $\lambda_1 + \dots + \lambda_5 = 1$ att $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 1)$ är de enda gitterpunkterna \mathbf{x} kan vara. Dessa är fem till antalet.

Övning 4.1. Om P en gitterpolytop i \mathbb{R}^d så kan den skrivas som ett konvext hölje av ett ändligt antal gitterpunkter, $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ för något positivt heltal k . Då gäller att $nP = \mathbf{K}(n\mathbf{x}_1, \dots, n\mathbf{x}_k)$. Eftersom \mathbf{x}_i är en gitterpunkt för varje $i = 1, 2, \dots, k$ har vi att $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_d)$ där x_j är ett heltal för alla $j = 1, 2, \dots, d$. Då produkten av två heltal är ett heltal så är det klart att

nx_j också är ett heltal för alla j . Därmed följer det att $n\mathbf{x}_i$ är en gitterpunkt för alla i . Alltså är nP ett konvext hölje av ett antal gitterpunkter och är därför en gitterpolytop.

Övning 4.3. Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (at)^n$ så kan vi göra substitutionen $s = at$ och få att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (at)^n = \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-at}.$$

Övning 4.5. (i) Vi har att

$$(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)t + \alpha_1 \alpha_2 t^2.$$

Då $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ följer det att

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

och

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{4} = \frac{1 - 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Därför gäller det att

$$(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t) = 1 - 1 \cdot t + (-1)t^2 = 1 - t - t^2.$$

(ii) Vi noterar först att

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - \alpha_1 t} + \frac{B}{1 - \alpha_2 t} &= \frac{A(1 - \alpha_2 t)}{(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)} + \frac{B(1 - \alpha_1 t)}{(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)} = \\ &= \frac{A(1 - \alpha_2 t) + B(1 - \alpha_1 t)}{(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)} = \\ &= \frac{A + B - t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)}{(1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)} = \\ &= \frac{A + B - t(\alpha_1 B + \alpha_2 A)}{1 - t - t^2}. \end{aligned}$$

Som i ledningen sätter vi nu uttrycket ovan lika med $\frac{1}{1-t-t^2}$ och drar slutsatsen att

$$A + B = 1 \text{ och } \alpha_1 B + \alpha_2 A = 0.$$

Ekvationen $A + B = 1$ är ekvivalent med att $B = 1 - A$. Vi ersätter därför B i ekvationen $\alpha_1 B + \alpha_2 A = 0$ med $1 - A$ och får att

$$\begin{aligned} \alpha_1(1 - A) + \alpha_2 A = 0 &\iff \alpha_1 - \alpha_1 A + \alpha_2 A = 0 \iff \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_1 A - \alpha_2 A = (\alpha_1 - \alpha_2)A \iff \\ &\iff A = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

Vi utnyttjar nu att $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ och får att $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$. Stoppar vi in $A = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}$ i ekvationen $A + B = 1$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}} + B = 1 &\iff B = 1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \alpha_1}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Övning 4.7. Vi skriver om högerledet enligt nedan

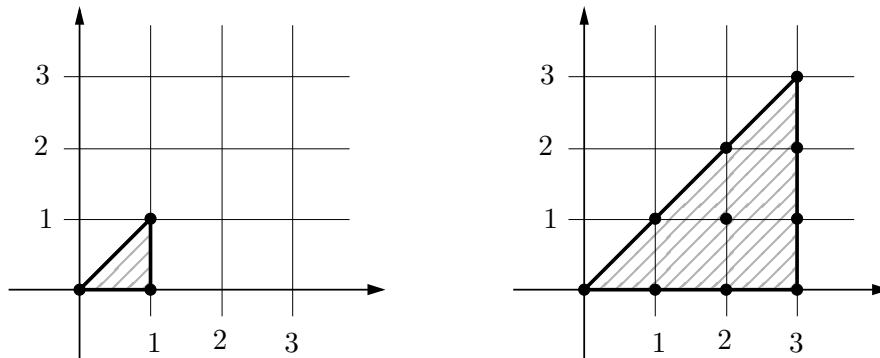
$$\begin{aligned} \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} &= \frac{A(t+1)}{(t-1)(t+1)} + \frac{B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{A(t+1) + B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \\ &= \frac{(A+B)t + A - B}{(t-1)(t+1)} \end{aligned}$$

Om uttrycket ovan ska vara lika med $\frac{3t+1}{(t-1)(t+1)}$ för alla t så måste $A + B = 3$ och $A - B = 1$. Skriver vi om den andra ekvationen som $A = 1 + B$ och använder detta i den första ekvationen får vi att

$$A + B = 3 \iff 1 + B + B = 3 \iff 2B = 2 \iff B = 1$$

Eftersom $A - B = 1$ följer det nu att $A = 2$.

Övning 4.9. Vi ritar ut P och $3P$ enligt nedan.



Från figurerna framgår att P innehåller 3 gitterpunkter medan $3P$ innehåller 10 gitterpunkter.

Övning 4.11. Vi utvecklar vänsterledet och får

$$\begin{aligned}
 F(t) \cdot (G(t) + H(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) t^n \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(b_0 + c_0) + a_{n-1}(b_1 + c_1) + \dots + a_0(b_n + c_n)) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_n c_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 b_n + a_0 c_n) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} ((a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) + (a_n c_0 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 c_n)) t^n = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) t^n + \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_0 + a_{n-1} c_1 + \dots + a_0 c_n) t^n = \\
 &= F(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot H(t).
 \end{aligned}$$

Övning 5.1. Vi har att

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

Övning 5.3. Eftersom vi ska välja ut 3 siffror bland 10 stycken siffror är svaret

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Övning 5.5. (i) Enligt Sats 5.2.2 med $n = 2$ finns det

$$\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 5 \cdot 2 = 10$$

sådana gitterpunkter.

- (ii) Uttrycket $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3}$ är ett monom i variablerna s_1, s_2 och s_3 av grad som mest 2 om och endast om $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ och $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Enligt föregående uppgift finns det 10 olika val för vad x_1, x_2 och x_3 kan vara. En alternativ lösning skulle vara att lista alla sådana monom. De är

$$1, s_1, s_2, s_3, s_1^2, s_1 s_2, s_1 s_3, s_2^2, s_2 s_3, s_3^2$$

vilket är precis 10 stycken.

- (iii) Enligt Sats 5.2.2 finns det $\binom{3+n}{n}$ sådana monom eftersom $s_1^{x_1} s_2^{x_2} s_3^{x_3}$ är ett monom av grad som mest n om och endast om $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 \leq n$.

Övning 5.7. Att bland n stycken objekt välja ut k stycken är samma sak som att bland n objekt välja bort $n - k$ stycken objekt. Algebraisk kan man visa likheten på följande vis

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Övning 5.9. (i) Likheten säger att summan av två tal som står bredvid varandra på plats $k - 1$ och k i rad $n - 1$ är lika med talet som står på plats k i rad n . Exempelvis ser vi att talet under 4 och 6 i triangeln är 10 och att $4 + 6 = 10$.

(ii) Vi förenklar högerledet så att vi ser att det är lika med vänsterledet.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{(n-1)!k}{k(n-k)(k-1)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)(n-1-k)!k!} = \\ &= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Övning 6.1. Vi har att $s^{\mathbf{x}} = s^{(1,2,3)} = s_1^1 s_2^2 s_3^3$ och $s^{\mathbf{y}} = s^{(4,5,6)} = s_1^4 s_2^5 s_3^6$ samt att

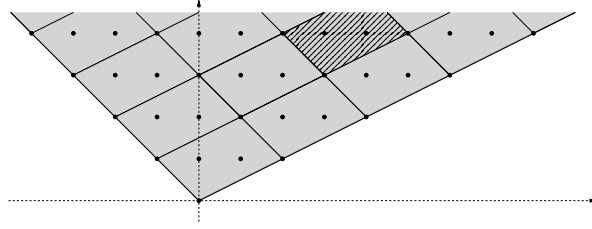
$$s^{\mathbf{x}} \cdot s^{\mathbf{y}} = s^{(1,2,3)} \cdot s^{(4,5,6)} = s_1^1 s_2^2 s_3^3 \cdot s_1^4 s_2^5 s_3^6 = s_1^{1+4} s_2^{2+5} s_3^{3+6} = s_1^5 s_2^7 s_3^9 = s^{(5,7,9)}.$$

Slutligen är $S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s)$ summan av uttryck på formen $s^{\mathbf{p}}$ där \mathbf{p} är en gitterpunkt i mängden $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Denna mängd innehåller bara två punkter och båda dessa är gitterpunkter så

$$S_{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}}(s) = s^{\mathbf{x}} + s^{\mathbf{y}} = s_1^1 s_2^2 s_3^3 + s_1^4 s_2^5 s_3^6.$$

Övning 6.3. För att beräkna $S_{nP}(s)$ behöver vi beräkna gitterpunkterna i nP . Per definition är nP triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(n, 0)$ och $(0, n)$. Det följer att gitterpunkterna i nP består av alla punkter $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ så att $x_1, x_2 \geq 0$ och $x_1 + x_2 \leq n$. Enligt definitionen är $S_{nP}(s)$ summan av alla uttryck av typen $s^{(x_1, x_2)}$ så att (x_1, x_2) är en gitterpunkt, vilket är precis de (x_1, x_2) så att $x_1, x_2 \geq 0$ och $x_1 + x_2 \leq n$.

Övning 6.5. Parallelogrammen $\{\mathbf{p} + (v_1, 1) + 2(v_2, 1) \mid \mathbf{p} \in Q\}$ är kopian av Q som har sin nedersta punkt i punkten $(v_1, 1) + 2(v_2, 1) = (v_1 + 2v_2, 3)$. Vi markerar därför parallelogrammen som har sin "bas" i denna punkt. (Notera att hela parallelogrammen ej fick plats i figuren.)



Övning 6.7. Från definitionen har vi att

$$\text{Kon}(\mathbf{v}) = \{k(\mathbf{v}, 1) \mid k \geq 0\} = \{(k\mathbf{v}, k) \mid k \geq 0\}.$$

Detta är en linje från origo som passerar genom punkten $(\mathbf{v}, 1)$. För att förenkla notationen skriver vi $P = \{\mathbf{v}\}$. Enligt Sats 6.1.4 är gitterpunkterna i konen på formen (\mathbf{w}, n) där $\mathbf{w} \in nP$ och $n \in \mathbb{N}$. Eftersom $nP = \{n\mathbf{v}\}$ så måste $\mathbf{w} = n\mathbf{v}$. Därmed gäller att gitterpunkterna i konen är $(n\mathbf{v}, n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Detta kan också inses från att k måste vara ett heltal om en punkt $(k\mathbf{v}, k)$ i konen ska vara en gitterpunkt. Om k är ett heltal så är $k\mathbf{v}$ en gitterpunkt så därmed är $(k\mathbf{v}, k)$ med $k \in \mathbb{N}$ de enda gitterpunkterna i konen.

Enligt Hjälpsats 6.2.8 har vi att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_{0P}(s)t^0 + S_P(s)t^1 + S_{2P}(s)t^2 + \dots$$

Då $nP = \{n\mathbf{v}\}$ får vi att $S_{nP}(s) = s^{n\mathbf{v}}$. Därmed är

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = s^{0\mathbf{v}}t^0 + s^{\mathbf{v}}t^1 + s^{2\mathbf{v}}t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n\mathbf{v}}t^n.$$

Slutligen ser vi att om vi evaluerar denna summa i $s = 1$ så får vi

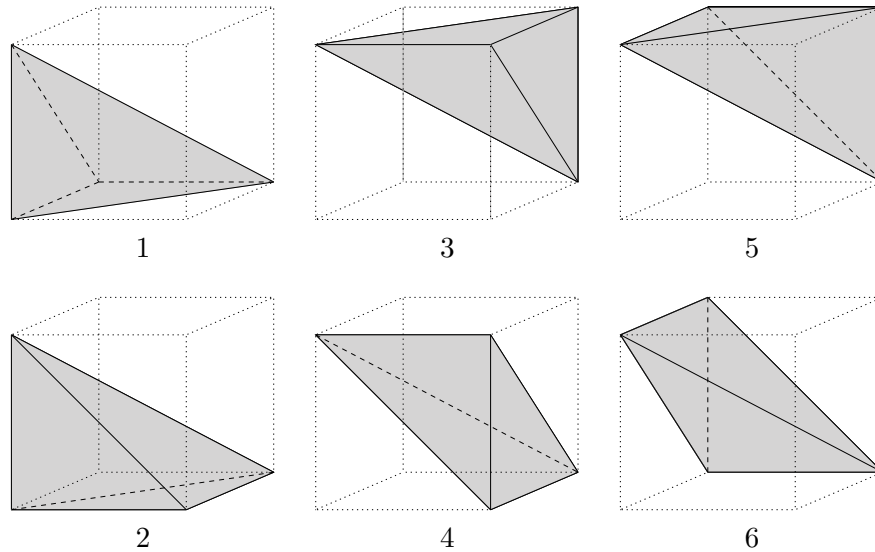
$$S_{\text{Kon}(P)}(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Övning 6.9. Tag en punkt $\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1)$ där \mathbf{p} är en gitterpunkt i Q och $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Vi vill då visa att denna punkt ligger i konen över P . Enligt definitionen för Q har vi att $\mathbf{p} = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1)$ för några tal r_1, r_2 med $0 \leq r_1, r_2 < 1$. Därmed är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{p} + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1) = r_1(v_1, 1) + r_2(v_2, 1) + n_1(v_1, 1) + n_2(v_2, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(v_1, 1) + (n_2 + r_2)(v_2, 1). \end{aligned}$$

Låter vi $k_1 = n_1 + r_1$ och $k_2 = n_2 + r_2$ får vi att $\mathbf{x} = k_1(v_1, 1) + k_2(v_2, 1)$ där $k_1, k_2 \geq 0$. Per definition är därmed \mathbf{x} en punkt i konen.

Övning 7.1. Numrera tetraederarna i trianguleringen från 1 till 6 enligt nedan



Vi kontrollerar nu var och en av skärningarna mellan tetraederna.

- (i) Vi ser att tetraeder 1 skär tetraederna 2 och 6 i en fasett och övriga tetraedrar i en kant.
- (ii) Tetraeder 2 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraedern 4 i en fasett, och de övriga i en kant.
- (iii) Tetraeder 3 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraederna 4 och 5 i en fasett och tetraeder 6 i en kant.
- (iv) Tetraeder 4 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraederna 5 och 6 i en kant.
- (v) Tetraeder 5 skär, utöver de tidigare nämnda, tetraedern 6 i en fasett.

Därmed är alla skärningar av tetraedrar på rätt form.

Övning 7.3. Vi har att

$$a_1 = 3 - a_2 - a_3 \text{ och } a_2 = \frac{3}{2} - 3a_3$$

vilket vi sätter in i ekvationen $27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 19$. Detta ger

$$\begin{aligned} 27a_3 + 9\left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) + 3(3 - a_2 - a_3) &= \\ &= 27a_3 + 9\left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) + 3\left(3 - \left(\frac{3}{2} - 3a_3\right) - a_3\right) = 19. \end{aligned}$$

Detta är nu bara en ekvation med variabeln a_3 som vi löser:

$$(27 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot 2)a_3 + 9 \cdot \frac{3}{2} + 9 - \frac{9}{2} = 19 \iff 6a_3 + 18 = 19 \iff a_3 = \frac{1}{6}.$$

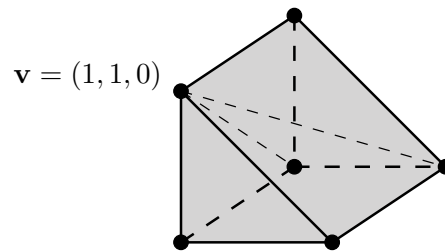
Använder vi att $a_3 = \frac{1}{6}$ i ekvationen $a_2 = \frac{3}{2} - 3a_3$ får vi

$$a_2 = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

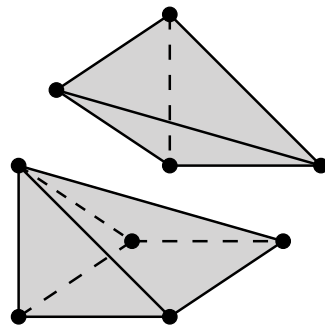
Genom att substituera in $a_2 = 1$ och $a_3 = \frac{1}{6}$ i ekvationen $a_1 = 3 - a_2 - a_3$ får vi att

$$a_1 = 3 - 1 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

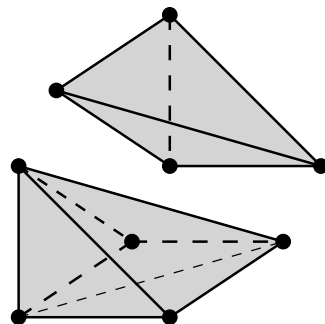
Övning 7.5. Vi börjar med att välja hörnet $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ i P och dra linjer från denna punkt till alla andra hörn i P .



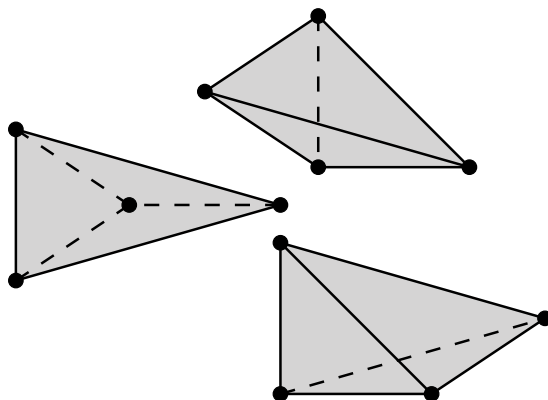
Detta ger en indelning av P i två pyramider.



Den ena pyramiden är en tetraeder och den andra är en pyramid över en kvadrat. Nu triangulerar vi kvadraten genom att välja ett hörn och dra diagonalen från det hörnet till det motstående hörnet i kvadraten.

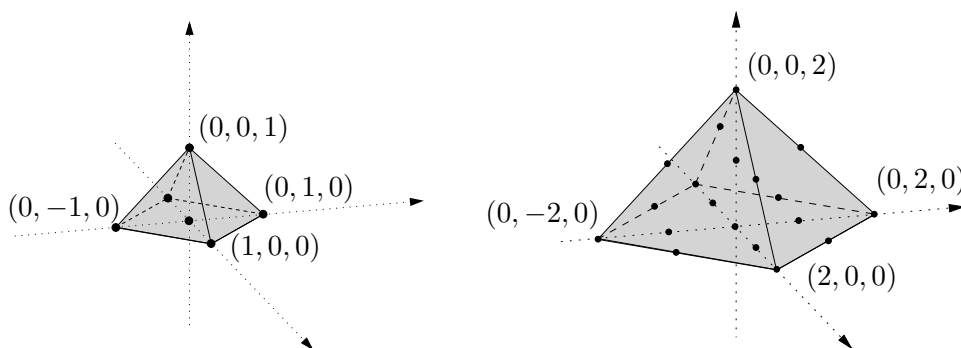


Genom att ta pyramiderna över dessa trianglar skapar vi två nya tetraedrar. Totalt har vi därför delat in vår polyeder i tre tetraedrar som ger en fullständig triangulering av P .



Övning 7.7. (i) P består av fyra kopior av tetraedern T från Övning 7.4. Därför är volymen av P lika med $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

(ii) Vi börjar med att rita P och $2P$.



Vi ser att P innehåller 6 stycken gitterpunkter,

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1),$$

så $L_P(1) = 6$. Uppförstoringen $2P$ har 19 stycken gitterpunkter:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (-1, 0, 0), (-2, 0, 0), \\ &(0, 1, 0), (0, 2, 0), (0, -1, 0), (0, -2, 0), (1, 1, 0), \\ &(-1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), \\ &(-1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Därmed är $L_P(2) = 19$. Vi använder oss nu av Sats 7.3.6 för att bestämma $L_P(3)$ enligt nedan.

$$\text{Vol}(P) = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6} \iff \frac{4}{6} = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{19}{2} + \frac{6}{2} - \frac{1}{6}.$$

Genom att lösa ut $L_P(3)$ från detta uttryck får vi $L_P(3) = 44$.

- (iii) Koefficienterna a_3, a_2, a_1, a_0 i Ehrhartpolynomet av P kan beräknas med formlerna i Sats 7.2.7 enligt nedan

$$a_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3}L_P(3) - \frac{3}{2}L_P(2) + 3L_P(1) - \frac{11}{6} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 44 - \frac{3}{2} \cdot 19 + 3 \cdot 6 - \frac{11}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$a_2 = 1 + 2L_P(2) - \frac{5}{2}L_P(1) - \frac{1}{2}L_P(3) = 1 + 2 \cdot 19 - \frac{5}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 44 = 2$$

$$a_3 = \frac{L_P(3)}{6} - \frac{L_P(2)}{2} + \frac{L_P(1)}{2} - \frac{1}{6} = \text{Vol}(P) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Därför ges Ehrhartpolynomet $L_P(n)$ för P av

$$L_P(n) = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{7}{3}n + 1.$$

A Några bevis

A.1 Konvexa höljen och polygoner

Vi såg i Sats 3.2.3 att det konvexa höljet av tre punkter som inte låg på en linje var en triangel med de tre punkterna som hörn. Vi vill här bevisa att det konvexa höljet av n punkter som inte ligger på en linje är en polygon med som mest n hörn om $n > 3$. Vi börjar med att undersöka hur det blir med 4 punkter.

Exempel A.1.1. Betrakta det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ av fyra punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{R}^2$. Utifall någon av de fyra punkterna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ och \mathbf{x}_4 ligger i det konvexa höljet av de övriga tre så kan vi enligt Övning 3.4 uttrycka K som ett konvext hölje av enbart tre punkter. Om till exempel $\mathbf{x}_4 \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ så gäller att $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Eftersom vi redan har studerat konvexa höljen av färre än fyra punkter så antar vi därför att ingen av dessa punkter ligger i det konvexa höljet av de övriga.

En punkt \mathbf{p} i K är på formen

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 + \lambda_4 \mathbf{x}_4$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ och $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Precis som i beviset av Sats 3.2.3 så får vi två fall beroende på om λ_4 är 1 eller ej.

Om $\lambda_4 = 1$ så är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ så $\mathbf{p} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + 0\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_4$.

Om istället $\lambda_4 \neq 1$ så kan vi skriva

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = (1 - \lambda_4) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_3 \right) = (1 - \lambda_4) \mathbf{y}$$

där vi infört beteckningen $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} \mathbf{x}_3$. I ett försök att förenkla notationen inför vi $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4}$ och $\mu_3 = \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4}$. Eftersom $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ och

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_4} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{1 - \lambda_4} = \frac{1 - \lambda_4}{1 - \lambda_4} = 1$$

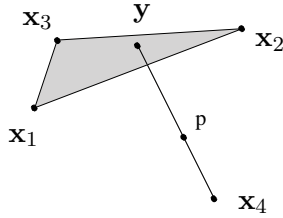
så har vi att \mathbf{y} ligger i det konvexa höljet

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \{\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \mu_3 \mathbf{x}_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \text{ och } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1\}.$$

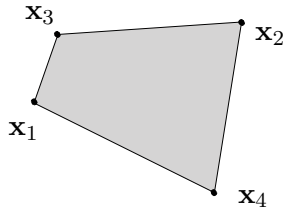
Vi har antagit att ingen av de fyra punkterna ligger i det konvexa höljet av de övriga tre så speciellt gäller att $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och \mathbf{x}_3 inte ligger på en linje. Enligt Sats 3.2.3 är därför detta konvexa hölje lika med triangeln med hörn i $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ och \mathbf{x}_3 . Då vi kan skriva vår ursprungliga punkt \mathbf{p} som

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 + \lambda_4 \mathbf{x}_4 = (1 - \lambda_4) \mathbf{y} + \lambda_4 \mathbf{x}_4$$

så ser vi att \mathbf{p} ligger i det konvexa höljet av \mathbf{y} och \mathbf{x}_4 där \mathbf{y} är en punkt i triangeln $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Eftersom det konvexa höljet av två punkter är ett linjesegment så följer att \mathbf{p} ligger på linjesegmentet mellan \mathbf{x}_4 och en punkt i triangeln $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.



På samma sätt som i beviset av Sats 3.2.3 ser vi att genom att variera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och λ_4 får vi *alla* punkter på *alla* sådana linjesegment. Därför är det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ en fyrhörning.



På ett liknande sätt kan vi visa att det konvexa höljet av fem punkter är en polygon med som mest fem hörn. Det blir dock väldigt omständligt att göra detta först för fem punkter, sedan för sex punkter, sedan sju punkter och så vidare. Istället visar vi i nästa sats att motsvarande påstående gäller för n stycken punkter, för *alla* positiva heltal $n \geq 3$.

Sats A.1.2. *Låt $n \geq 3$ och låt $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ vara ett antal punkter som inte alla ligger på en linje. Då är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ en polygon med som mest n stycken hörn.*

Bevis. Vi visar detta med en teknik som kallas *induktion*. Det innebär att vi först visar att påståendet är sant för ett basfall, vilket i vårt fall är att ha tre punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ som inte ligger på en linje. Därefter gör vi *antagandet* att påståendet är sant för k stycken punkter där $k \geq 3$ och försöker använda detta antagande för att visa att påståendet i så fall är sant för $k + 1$ stycken punkter. I fall vi har lyckats visa att påståendet är sant för basfallet med 3 punkter så följer det därför att påståendet även är sant för 4 punkter. Om påståendet är sant för 4 punkter så följer det därefter att det är sant för 5 punkter och därför även för 6 punkter, och så vidare.

Nu när vi förklarat metoden så börjar vi med att bevisa att påståendet är sant i basfallet med tre punkter. Enligt Sats 3.2.3 är det konvexa höljet av tre punkter som inte ligger på en linje en triangel vilket är en polygon. Därmed är påståendet sant i basfallet $n = 3$.

Det återstår att visa att satsen är sann för $k + 1$ stycken punkter givet antagandet att satsen är sann för k stycken punkter. Antag därför att satsen är sann för k stycken punkter och att $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ är $k + 1$ stycken punkter som inte alla ligger på en linje. Eftersom inte alla punkterna ligger på en linje

så kan vi ordna dem så att åtminstone \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , och \mathbf{x}_3 inte ligger på en linje. Låt

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

vara en punkt i det konvexa höljet $K = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$. Precis som tidigare får vi två fall.

Om $\lambda_{k+1} = 1$ är $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ så $\mathbf{p} = \mathbf{x}_{k+1}$.

Om $\lambda_{k+1} \neq 1$ kan vi skriva

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = (1 - \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_k \right) = (1 - \lambda_{k+1}) \mathbf{y}$$

där $\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_k$. Låt $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}$ för $i = 1, 2, \dots, k$. Då vi har att $\mu_i \geq 0$ för alla $i = 1, 2, \dots, k$ och

$$\mu_1 + \dots + \mu_k = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$

så följer det att \mathbf{y} ligger i det konvexa höljet

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \left\{ \mu_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{x}_k \mid \mu_1, \dots, \mu_k \geq 0 \text{ och } \sum_{i=1}^k \mu_i = 1 \right\}.$$

Enligt antagandet så är $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ en polygon eftersom det är det konvexa höljet av k stycken punkter som inte alla ligger på en linje då \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 och \mathbf{x}_3 inte ligger på en linje. Nu följer det att punkten

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) \mathbf{y} + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

ligger på linjesegmentet mellan \mathbf{y} och \mathbf{x}_{k+1} och när vi varierar våra λ_i får vi alla möjliga linjesegment från polygonen $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ till punkten \mathbf{x}_{k+1} . Detta ger en polygon med som mest $k + 1$ stycken hörn.

Nu följer påståendet för alla $n \geq 3$ genom induktion. \square

A.2 Att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder

I Kapitel 6 visade vi Hjälpsats 6.3.1 och Sats 6.3.3 som handlade om att räkna gitterpunkter i konen över ett linjesegment. Följande satser är analoga påstående för att räkna gitterpunkter i konen över en tetraeder. Läsaren uppmanas att jämföra bevisen som följer med bevisen av Hjälpsats 6.3.1 respektive Sats 6.3.3 och notera deras likheter.

Hjälpsats A.2.1. *Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \subset \mathbb{R}^3$ vara en tetraeder. Då kan varje gitterpunkt \mathbf{x} i konen $\text{Kon}(P)$ på ett unikt sätt skrivas som*

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$$

där \mathbf{p} är en gitterpunkt i mängden

$$Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$$

och \mathbf{x}_i är en gitterpunkt i $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$.

Bevis. Från Övning 6.7 gäller det att $\mathbf{x}_i = n_i(\mathbf{v}_i, 1)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ där $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$. Först visar vi att varje gitterpunkt \mathbf{x} i konen över P kan skrivas på formen $\mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$. Därefter visar vi att varje punkt på formen $\mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ faktiskt är en gitterpunkt i konen över P .

Tag en gitterpunkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Kon}(P) \cap \mathbb{Z}^4$. Då är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

för ett unikt val av reella tal $k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0$. Eftersom k_1 är ett reellt tal kan vi dela upp det i dess heltalsdel n_1 och dess decimaltalsdel $0 \leq r_1 < 1$ så att

$$k_1 = n_1 + r_1.$$

På samma sätt är $k_i = n_i + r_i$, där $n_i \in \mathbb{N}$ och $0 \leq r_i < 1$ för alla $i = 1, 2, 3, 4$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(\mathbf{v}_1, 1) + (n_2 + r_2)(\mathbf{v}_2, 1) + (n_3 + r_3)(\mathbf{v}_3, 1) + (n_4 + r_4)(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)) + \\ &\quad + (r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)) \end{aligned}$$

där vi ser att punkten $\mathbf{v} = n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ är en gitterpunkt då dess koordinater är summor av produkter av heltal. Vidare är punkten $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ per definition en punkt i mängden Q . Då \mathbf{p} är en differens av två gitterpunkter,

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{v},$$

så följer det att även $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ är en gitterpunkt. Därmed har vi att

$$\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \in Q \cap \mathbb{Z}^4.$$

Således har vi visat att en godtycklig gitterpunkt \mathbf{x} i konen över P kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

där $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ och \mathbf{p} är en gitterpunkt i Q .

Slutligen måste vi visa att för varje gitterpunkt $\mathbf{p} \in Q$ och för alla val av $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ gäller att $\mathbf{x} = \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1)$ ligger i konen. På grund av hur mängden Q är definierad har vi att punkten \mathbf{p} kan skrivas på formen $\mathbf{p} = r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1)$ för några tal r_1, r_2, r_3, r_4 med $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1$. Därmed är

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{p} + n_1(\mathbf{v}_1, 1) + n_2(\mathbf{v}_2, 1) + n_3(\mathbf{v}_3, 1) + n_4(\mathbf{v}_4, 1) = \\ &= (n_1 + r_1)(\mathbf{v}_1, 1) + (n_2 + r_2)(\mathbf{v}_2, 1) + (n_3 + r_3)(\mathbf{v}_3, 1) + (n_4 + r_4)(\mathbf{v}_4, 1). \end{aligned}$$

Låter vi $k_i = n_i + r_i$ för $i = 1, 2, 3, 4$ får vi att

$$\mathbf{x} = k_1(\mathbf{v}_1, 1) + k_2(\mathbf{v}_2, 1) + k_3(\mathbf{v}_3, 1) + k_4(\mathbf{v}_4, 1)$$

där $k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0$ så \mathbf{x} är en punkt i konen per definition. \square

Sats A.2.2. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \subset \mathbb{R}^3$ vara en tetraeder. Om vi inför $L_i = \text{Kon}(\mathbf{v}_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$ så gäller att

$$S_{\text{Kon}(P)}(s, t) = S_Q(s, t) \cdot S_{L_1}(s, t) \cdot S_{L_2}(s, t) \cdot S_{L_3}(s, t) \cdot S_{L_4}(s, t)$$

där $Q = \{r_1(\mathbf{v}_1, 1) + r_2(\mathbf{v}_2, 1) + r_3(\mathbf{v}_3, 1) + r_4(\mathbf{v}_4, 1) \mid 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 1\}$.

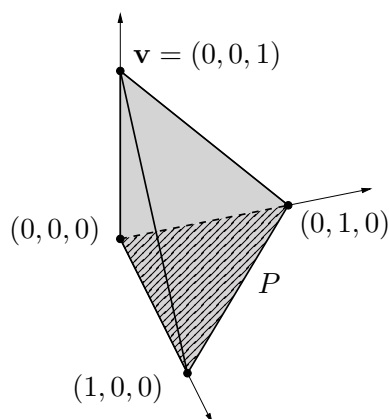
Bevis. Detta följer direkt från Hjälpsats A.2.1. □

A.3 Triangulera en polyeder

Vi kommer i det här kapitlet visa att varje polyeder kan trianguleras, se Definition 7.1.1. För att göra detta börjar vi med att definiera pyramiden över en *polygon* i \mathbb{R}^3 .

Definition A.3.1. Låt $P = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en *polygon* och låt \mathbf{v} vara en punkt i \mathbb{R}^3 . Om $\mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v})$ är en *polyeder*, och alltså *inte* en polygon, så definierar vi en *pyramid över P* att vara $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v})$.

Exempel A.3.2. Låt $P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ och $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Då är $T = \mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ en pyramid över P eftersom T är en tetraeder, vilket är en polyeder.

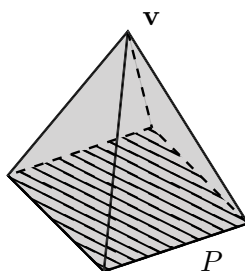


▲

Exempel A.3.3. Låt

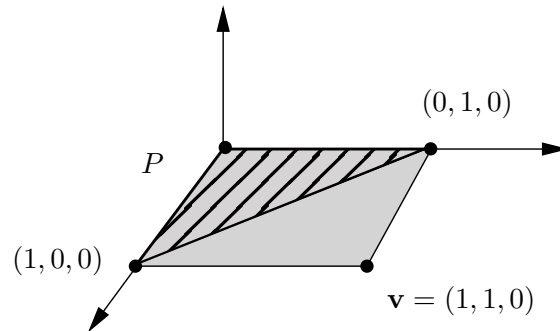
$$P = \mathbf{K}((-1, -1, -1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (1, 1, -1))$$

och $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$. Då är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ pyramiden över P nedan.





Exempel A.3.4. Låt $P = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Då är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v}) = \mathbf{K}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0))$ en kvadrat, vilket *inte* är en polyeder. Därför är $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ *inte* en pyramid över P eftersom $\mathbf{K}(P \cup \mathbf{v})$ inte är en polyeder.

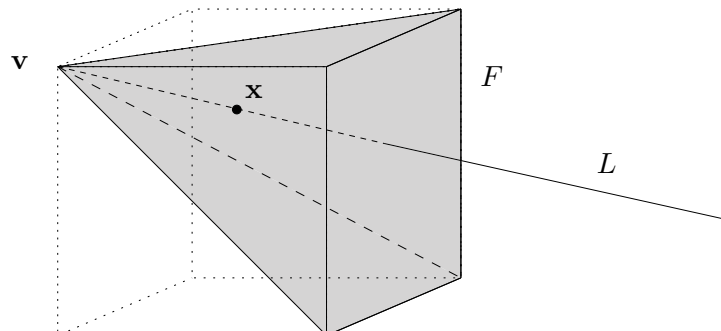


Vi ska nu använda de pyramider vi definierat för att visa att varje polyeder kan trianguleras. Läsaren uppmuntras att läsa igenom Exempel 7.1.4 innan beviset av följande sats eftersom tekniken vi kommer använda är en generalisering av metoden vi använde i det exemplet.

Sats A.3.5. För varje polyeder P finns det en triangulering Δ_P av P så att för varje $T \in \Delta_P$ är hörnen av T också hörn i P .

Bevis. Låt P vara en polyeder. Vi kommer triangulera P genom att först dela in P i pyramider.

För att göra detta väljer vi ett hörn \mathbf{v} i P och konstruerar alla möjliga pyramider på formen $Q_F = \mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$ där F är en fasett av P som inte innehåller \mathbf{v} . Vi noterar först att pyramiderna på den här formen ger en uppdelning av P i en union av pyramider. Detta följer av att om \mathbf{x} är någon punkt i P som inte är lika med \mathbf{v} så ligger linjesegmentet L från \mathbf{v} till \mathbf{x} i P eftersom P är konvex. Om vi förlänger linjesegmentet L kommer detta till slut att skära någon fasett F av P som inte innehåller \mathbf{v} . Vi illustrerar detta nedan.



Från definitionen av pyramider följer att \mathbf{x} ligger i pyramiden $\mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$. Eftersom \mathbf{x} var godtycklig drar vi slutsatsen att

$$P = Q_{F_1} \cup Q_{F_2} \cup \cdots \cup Q_{F_k}$$

där F_1, F_2, \dots, F_k är fasetterna i P som inte innehåller \mathbf{v} .

Givet ovanstående konstruktion räcker det att visa att vi kan triangulera pyramiderna på ett sådant sätt att tetraedrar som ligger i olika pyramider uppfyller det andra kravet i Definition 7.1.1.

Låt därför $Q_F = \mathbf{K}(F \cup \mathbf{v})$ vara en pyramid över en fasett F . Eftersom F är en polygon vet vi från Kapitel 2 att vi kan hitta en triangulering av polygonen F utan att introducera nya hörn. Vi börjar med att välja en sådan triangulering, det vill säga en mängd Δ_F som består av trianglar vars union är F . Tag en triangel $T \in \Delta_F$. Då är $R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v})$ en tetraeder. Vi påstår att mängden $\Delta_{Q_F} = \{R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v}) \mid T \in \Delta_F\}$ är en triangulering av Q_F . För att kontrollera detta påstående behöver vi kontrollera att mängden Δ_{Q_F} uppfyller de båda kraven i Definition 7.1.1.

Vi börjar med att visa att $Q_F = \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$.

Inklusionen $Q_F \supseteq \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$ följer av att $Q_F \supseteq R_T$ för alla $R_T \in \Delta_{Q_F}$.

För att visa inklusionen $Q_F \subseteq \bigcup_{R_T \in \Delta_{Q_F}} R_T$ väljer vi en godtycklig punkt $\mathbf{x} \in Q_F$ och visar att $\mathbf{x} \in R_T$ för något R_T . Låter vi F ha hörnen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ så gäller att $Q_F = \mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Då $\mathbf{x} \in Q_F$ kan vi därför skriva \mathbf{x} på formen $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ för några $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ med $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Om $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ så ligger \mathbf{x} i R_T för alla R_T i Δ_{Q_F} . Om \mathbf{x} inte är lika med \mathbf{v} så är $\lambda_0 \neq 1$. Vi noterar då att \mathbf{x} kan skrivas som

$$\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{v} + (1 - \lambda_0) \mathbf{y}$$

där $\mathbf{y} = \frac{1}{1 - \lambda_0} (\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n)$, vilket är samma typ av omskrivning som vi använde oss av i beviset av Sats 3.2.3. Vitsen med omskrivningen är att eftersom $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ så är

$$\frac{1}{1 - \lambda_0} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \frac{1}{1 - \lambda_0} (1 - \lambda_0) = 1.$$

Med andra ord gäller att $\mathbf{y} \in \mathbf{K}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = F$. Då Δ_F är en triangulering av F så betyder det att $\mathbf{y} \in T$ för någon triangel T i Δ_F . Då \mathbf{x} ligger på linjen mellan \mathbf{y} och \mathbf{v} så har vi att $\mathbf{x} \in R_T = \mathbf{K}(T \cup \mathbf{v})$. Detta visar att Δ_{Q_F} uppfyller första delen i definitionen av en triangulering.

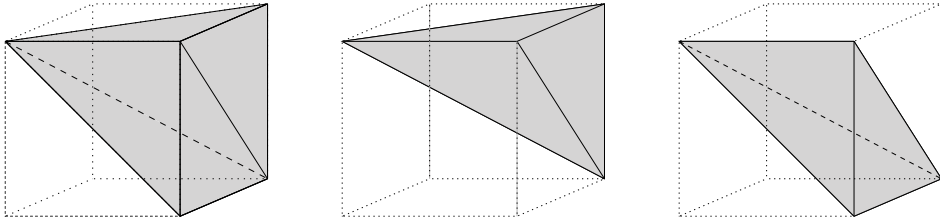
För att kontrollera andra delen i definitionen konstaterar vi att det för varje par $R_1, R_2 \in \Delta_{Q_F}$ gäller att

$$R_1 \cap R_2 = \mathbf{K}((R_1 \cap R_2 \cap F) \cup \mathbf{v}),$$

vilket läsaren kan kontrollera från definitionerna. Vidare är $R_1 \cap R_2 \cap F$ det samma som skärningen mellan två trianglar i trianguleringen Δ_F , så vi har att $R_1 \cap R_2 \cap F$ är en sida av både $R_1 \cap F$ och $R_2 \cap F$. Därför är

$$\mathbf{K}((R_1 \cap R_2 \cap F) \cup \mathbf{v})$$

en sida av både R_1 och R_2 . Detta ger oss en triangulering av pyramiden Q_F . Detta kan illustreras i fallet med en pyramid i en kub då vi får att pyramiden kan trianguleras som i följande figur.



Slutligen behöver vi visa att unionen av trianguleringarna av pyramiderna verkligen är en triangulering av P . Men det följer omedelbart av hur vi konstruerade trianguleringarna av pyramiderna eftersom två tetraedrar från två olika pyramider Q_{F_i} och Q_{F_j} skär varandra om och endast om de skär varandra i \mathbf{v} eller motsvarande fasetter skär varandra i ett hörn eller en kant som ligger i båda tetraederna. \square

Förslag till vidare läsning

Det mesta av teorin om Ehrhartpolynom som vi sett i detta kompendium återfinns i boken *Computing the Continuous Discretely* av Beck och Robins. Tyvärr är boken ganska svårläst och kan vara svårtillgänglig om man är ovan vid högre dimensionell geometri. För den som vill veta mer om Ehrhartteori kan speciellt bokens första del vara av intresse. Läsaren kan här hitta många spännande satser som inte fick plats i det här kompendiet. Dessa satser beskriver till exempel hur man geometriskt ska tolka Ehrhartpolynomet $L_P(n)$ för negativa heltal n .

Biggs bok *Discrete Mathematics* används ofta som kursbok i grundkurser i kombinatorik på högskolan och tar upp flera ämnen inom diskret matematik. Den börjar på samma sätt som detta kompendium med mängdteori och går sedan igenom olika ämnen såsom funktioner, primtal och olika räknetekniker. Därefter förklarar den flera olika algebraiska objekt såsom grupper, ringar och kroppar. Det är en trevlig bok som inte kräver några särskilda förkunskaper.

På KTH finns en kurs i linjär algebra för gymnasister. Det kompendium som används i kursen finns fritt tillgängligt på internet och passar utmärkt som en första introduktion till ämnet. En bra motivation för att lära sig linjär algebra är att ämnet beskriver hur man effektivt löser ekvationssystem av många linjära ekvationer. Sådana kunskaper ger också en djupare förståelse för de uträkningar som dyker upp i det här kompendiets sista kapitel.

Analys i flera variabler av Persson och Böiers går igenom derivator och integraler för funktioner i flera variabler. Speciellt ger boken en ordentlig definition av volymer av kroppar i tre dimensioner. Boken antar att man först läst boken *Analys i en variabel* av samma författare.

- [1] Matthias Beck & Sinai Robins: *Computing the Continuous Discretely*. Springer, 2007
- [2] Norman L. Biggs: *Discrete Mathematics*. 2:a upplagan. Oxford University Press, 2002.
- [3] David Rydh och Roy Skjelnes: *Linjär Algebra - Tio förrätter och två efterätter*. KTH
- [4] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i flera variabler*. 3:e upplagan. Studentlitteratur AB, 2005

Böckerna ovan finns att låna på KTH:s huvudbibliotek. Biblioteket är öppet för alla och ligger på Osquars backe 31. Kompendiet *Linjär Algebra - Tio förrätter och två efterätter* finns tillgängligt på matematikinstitutionens hemsida.

Sakregister

- antagande, 8
- axiom, 8
- bevis, 6
- boll, 32
- cirkelskiva, 4
- delmängd, 1
- disjunkta mängder, 2
- Ehrhart
 - funktionen, 40
 - polynom, 73
 - serien, 46
 - Ehrharts sats, 72
- ekvivalent, 7
- element, 1
- enhetskuben, 41
- euklidiska
 - d -rummet, 35
 - planet, 4
 - rummet, 32
- fasett, 33
- Fibonaccisekvensen, 44
- fyrdimensionell kub, 37
- genererande funktionen, 42
- gitter, 15, 32, 35
- höjd, 58
- hörn, 14, 33
- heltal, 2
- implicera, 7
- inre punkt, 5, 32
- kant, 14, 33
- kon, 58
- konvex mängd, 5
- konvext hölje, 29
- linjesegment, 4, 36
- mängd, 1
 - delmängd, 1
 - disjunkt, 2
 - konvex, 5
 - snitt, 2
 - union, 2
- naturliga tal, 2
- om och endast om, 7
- origo, 4, 32, 36
- påstående, 6
- Picks sats, 23
- platonsk kropp, 34
- polyeder, 33, 36
 - gitter-, 33
- polygon, 14, 36
 - gitter-, 15
- polytop, 36
 - gitter-, 36
- postulat, 8
- randen, 5, 32
- randpunkt, 5, 32
- rationella tal, 3
- reella tal, 3
- regelbunden
 - polyeder, 34
 - polygon, 15
 - polytop, 37
- rummet, *se* euklidiska rummet
- sida, 33
- snitt av mängder, 2
- summasymbolen, 3
- tal
 - hel-, 2
 - naturligt, 2
 - rationellt, 3
 - reellt, 3
- talplanet, *se* euklidiska planet
- tetraeder, 34
- triangulering, 22, 69
- union av mängder, 2
- uppförstoringen av en polytop, 39
- vikt, 17