Analyse Mathématique/Mathematical Analysis

Γ-convergence relaxée et application à des problèmes non coercifs

Björn GUSTAFSSON, Bernard HERON et Jacqueline MOSSINO

Résumé : On donne un résultat général de Γ-convergence relaxée et on l'applique à l'homogénéisation (ou au problème des couches limites) de matériaux stratifiés avec faible (et forte) conductivité, lorsque les coefficients convergent vers des coefficients mesures.

Relaxed Γ-convergence and application to noncoercive problems

Abstract : We give an abstract extended Γ-convergence result and apply it to the homogenization (or to the problem of limit layers) of stratified media with low (and high) conductivity, when the coefficients admit measure limits.

Abridged English Version. We consider minimization problems $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ and $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \quad \mathrm{Inf}\{J^\varepsilon(v)\ ;\ v \in V^\varepsilon\}, \qquad\qquad (\mathcal{P}) \quad \mathrm{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in V\}$$

where V^ε and V are nonempty subsets of a topological space W, J^ε and J are defined respectively on V^ε and V, with values in $\bar{\mathbb{R}}$. We assume that

(H1) Every sequence $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ of elements of V^ε such that $\underset{\varepsilon}{\mathrm{Sup}}\, J^\varepsilon(v^\varepsilon) < +\infty$ is relatively compact in W,

(H2) If $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ is such a sequence and if $v^\varepsilon \to v$ in W, then $v \in V$ and $\liminf J^\varepsilon(v^\varepsilon) \geq J(v)$,

(H3) There exists a nonempty subset $\mathcal{V}$ of V such that

$$\mathrm{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in \mathcal{V}\} = \mathrm{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in V\},$$
$$\forall\, v \in \mathcal{V},\ \exists\, v^\varepsilon \in V^\varepsilon\ :\ \limsup J^\varepsilon(v^\varepsilon) \leq J(v).$$

We prove

Theorem 1 : *Assume* (H1) *to* (H3) *and suppose that* u^ε *is a sequence of solutions of* $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ *such that* $\underset{\varepsilon}{\mathrm{Sup}}\, J^\varepsilon(u^\varepsilon) < +\infty$. *Then there exists a subsequence* ε' *and there exists* u *in* V *such that* u *solves* $(\mathcal{P})$ *and*

$$u^{\varepsilon'} \to u \ \text{ in } W, \quad J^{\varepsilon'}(u^{\varepsilon'}) \to J(u).$$

$\square$

We apply this extended Γ-convergence result to prove

Theorem 2 : *Let $\Omega = (0,1) \times \Omega'$, Ω' a bounded regular domain in $\mathbb{R}^{N-1}$ $(N \geq 2)$, $1 < p < \infty$,*

$$W_L^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) \; ; \; v = 0 \text{ on } \{0\} \times \Omega' \right\},$$
$$a_i^\varepsilon \in L^\infty(0,1), \text{ ess inf } a_i^\varepsilon > 0 \; (1 \leq i \leq N),$$
$$f^\varepsilon \in L^1(0,1; L^{p'}(\Omega')) \text{ for } (1/p) + (1/p') = 1$$

and let $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ be the minimization problem

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \;\; \text{Inf} \left\{ J^\varepsilon(v) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega a_i^\varepsilon(x_1)^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx - p \int_\Omega f^\varepsilon v dx \; ; \; v \in W_L^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Assume that there exists b_i $(1 \leq i \leq N)$, Radon measures on $[0,1]$, such that
· the set A of atoms of b_1 is empty or finite and $b_i(A) = 0$ for $i \geq 2$;
*· $b_1^\varepsilon = 1/a_1^\varepsilon \rightharpoonup b_1$, $b_i^\varepsilon = (a_i^\varepsilon)^{p-1} \rightharpoonup b_i$ $(i \geq 2)$ weakly * in $M[0,1]$ the dual of $C^0[0,1]$;*
· every sequence $\{1/a_i^\varepsilon\}_\varepsilon$ $(i \geq 2)$ is bounded in $L^1(0,1)$;
· $f^\varepsilon \longrightarrow f$ in $L^1(0,1; L^{p'}(\Omega'))$,
or $f^\varepsilon, f \in L^p(0,1; L^{p'}(\Omega'))$ and $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ in weak$-L^p(0,1; L^{p'}(\Omega'))$.
Then the sequence of minimization problems $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ converges to the problem

$$(\mathcal{P}) \;\; \text{Inf} \left\{ J(v) = \sum_{i=1}^N \int_{[0,1]\times\Omega'} |\psi_i|^p \, db_i(x_1) dx' - p \int_\Omega f v dx \; ; \; v \in V \right\}$$

where V is the set of v in $L^p(\Omega)$ such that there exist ψ_i in $L^p_{b_i}([0,1]; L^p(\Omega'))$ $(1 \leq i \leq N)$ satisfying (1) and (2) below

$$(1) \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega), \; \varphi_{|\{1\}\times\bar\Omega'} = 0 \implies \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \int_{[0,1]\times\Omega'} \psi_1 \varphi db_1(x_1) dx' = 0,$$

$$(2) \;\; \forall \, i \geq 2, \; \forall \, \varphi \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega), \; \varphi_{|[0,1]\times\partial\Omega'} = 0 \implies \int_{[0,1]\times\Omega'} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \psi_i \varphi \right) db_i(x_1) dx' = 0$$

and where the convergence of $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ to $(\mathcal{P})$ means that the unique solution u^ε of $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ converges to the unique solution u of $(\mathcal{P})$ in $L^{p'}(0,1; L^p(\Omega'))$ (and also in weak-$L^\infty(0,1; L^p(\Omega'))$ and uniformly on compact sets in $[0,1] \backslash A$) and $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$ converges to $J(u)$.*

<u>Remark</u>: Every v in $L^p(\Omega)$ satisfying (1) is piecewise continuous with respect to x_1 with jumps in A only so that (2) makes sense.

1. Un résultat théorique de Γ-convergence relaxée. On considère les problèmes:

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \quad \operatorname{Inf}\{J^\varepsilon(v)\ ;\ v \in V^\varepsilon\}, \qquad\qquad (\mathcal{P}) \quad \operatorname{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in V\}$$

où V^ε et V sont des sous ensembles non vides d'un espace topologique W et où J^ε et J sont des fonctionnelles définies sur V^ε et V, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$; on suppose W, J^ε et V^ε liés par l'hypothèse

(H1) Toute suite $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ d'éléments de V^ε telle que $\operatorname{Sup}_\varepsilon J^\varepsilon(v^\varepsilon) < +\infty$ est relativement compacte dans W.

De plus on fait sur $V^\varepsilon, V, W, J^\varepsilon$ et J les deux hypothèses suivantes de "Γ-convergence relaxée" :

(H2) Pour toute suite $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ d'éléments de V^ε qui vérifie $\operatorname{Sup}_\varepsilon J^\varepsilon(v^\varepsilon) < +\infty$ et qui converge vers v dans W, on a
$v \in V$ et $\liminf J^\varepsilon(v^\varepsilon) \geq J(v)$;

(H3) Il existe un sous-ensemble non vide $\mathcal{V}$ de V tel que
$\operatorname{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in \mathcal{V}\} = \operatorname{Inf}\{J(v)\ ;\ v \in V\}$,
$\forall\, v \in \mathcal{V},\ \exists\, v^\varepsilon \in V^\varepsilon\ :\ \limsup J^\varepsilon(v^\varepsilon) \leq J(v)$.

□

On montre alors le

Théorème 1 : *Sous les hypothèses* (H1) à (H3), *on suppose que* u^ε *est une suite de solutions de* $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ *telle que* $\operatorname{Sup}_\varepsilon J^\varepsilon(u^\varepsilon) < +\infty$. *Alors il existe une sous-suite* ε' *de* ε *et il existe un élément* u *de* V *tels que* u *est solution de* $(\mathcal{P})$ *et, lorsque* ε' *tend vers zéro*

$$u^{\varepsilon'} \to u \ \text{ dans } W, \text{ et } J^{\varepsilon'}(u^{\varepsilon'}) \to J(u).$$

Le Théorème 1 se démontre comme le théorème classique de la Γ-convergence (cf. par exemple [1]), lequel correspond à $V^\varepsilon = V = W = \mathcal{V}$.

Remarque : Si $(\mathcal{P})$ a une solution unique, les convergences énoncées ont lieu pour toute la suite ε.

2. Application en perturbation singulière ou en homogénéisation non coercive. Nous montrons que le Théorème 1 s'applique au comportement limite (homogénéisation ou perturbation singulière) de matériaux stratifiés dont les coefficients de conductivité convergent vers des mesures.

Plus précisément, soit $\Omega = (0,1)\times\Omega'$, Ω' domaine borné régulier de $\mathbb{R}^{N-1}$ $(N \geq 2)$: Ω représente un milieu stratifié dans la direction x_1, dont les hétérogénéités (localisées ou distribuées) sont mesurées par un paramètre ε qui prend une suite de valeurs tendant vers zéro. Soient a_i^ε $(1 \leq i \leq N)$ des fonctions qui vérifient

$$(1) \qquad a_i^\varepsilon \in L^\infty(0,1),\ \operatorname{inf\,ess}\, a_i^\varepsilon > 0.$$

Pour $1 < p < +\infty$, on pose

$$W_L^{1,p}(\Omega) = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega)\ ;\ v = 0 \text{ sur } \{0\} \times \Omega'\right\},$$

$$\mathrm{F}^\varepsilon\colon W_L^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R},\quad F^\varepsilon(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i^\varepsilon(x_1)^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx,$$

puis, f^ε étant donnée dans $L^1(0,1;L^{p'}(\Omega'))$ $((1/p)+(1/p')=1)$, on définit

$$J^\varepsilon \ :\ W_L^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R},\ J^\varepsilon(v) = F^\varepsilon(v) - p\int_\Omega f^\varepsilon v dx.$$

On considère alors le problème de minimisation

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \qquad \operatorname{Inf}\left\{ J^\varepsilon(v)\ ;\ \ v \in W_L^{1,p}(\Omega)\right\}$$

qui, de façon classique, a une solution unique u^ε.

Lorsque ε tend vers zéro, on suppose que

(2) il existe des mesures b_i $(1 \le i \le N)$ dans $M[0,1]$ dual de $C^0[0,1]$ telles que $b_1^\varepsilon = 1/a_1^\varepsilon \rightharpoonup b_1$ et $b_i^\varepsilon = (a_i^\varepsilon)^{p-1} \rightharpoonup b_i$ $(i \ge 2)$ dans $M[0,1]$ faible $*$,

(3) les suites $1/a_i^\varepsilon$ $(i \ge 2)$ sont bornées dans $L^1(0,1)$,

(4) l'ensemble A des atomes de b_1 est vide ou fini et $b_i(A) = 0$ pour $i \ge 2$.

□

Pour $E \subset [0,1]$ on note $C_E[0,1]$ l'espace des fonctions continues par morceaux dont les discontinuités sont dans E. On définit alors l'espace V des v de $C_A([0,1];L^p(\Omega'))$ telles qu'il existe ψ_i dans $L^p_{b_i}(\Omega)$ (i=1,...,N) vérifiant (5) et (6) ci-dessous

$$(5) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega),\ \varphi_{|\{1\}\times\bar\Omega'} = 0 \Longrightarrow \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \int_\Omega \psi_1 \varphi db_1(x) = 0,$$

$$(6) \qquad \forall\, i \ge 2,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega),\ \varphi_{|[0,1]\times\partial\Omega'} = 0 \Longrightarrow \int_\Omega \left(v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \psi_i\varphi \right) db_i(x) = 0$$

où $L^p_{b_i}(\Omega)$ est une notation abrégée pour $L^p_{b_i}([0,1];L^p(\Omega'))$, $db_i(x) = db_i(x_1)dx'$, $\int_\Omega ...db_i(x)$ désigne $\int_{[0,1]\times\Omega'} ...db_i(x_1)dx'$. Dans cette définition, ψ_i est nécessairement unique. De plus V est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|v\|_V^p = \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i\|^p_{L^p_{b_i}(\Omega)}\,.$$

Par application du Théorème 1, nous montrons le

Théorème 2. *On suppose que les coefficients* a_i^ε *vérifient* (1) *à* (4) *et que*

$$(7) \qquad \begin{array}{l} f^\varepsilon \longrightarrow f \text{ dans } L^1(0,1;L^{p'}(\Omega')) \text{ fort} \\ \text{ou } f^\varepsilon, f \in L^p(0,1;L^{p'}(\Omega')) \text{ et } f^\varepsilon \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(0,1;L^{p'}(\Omega')) \text{ faible.} \end{array}$$

Alors la suite de problèmes de minimisation $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ *converge vers le problème de minimisation*

$$(\mathcal{P}) \ \ \text{Inf}\left\{ J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\psi_i|^p \, db_i(x) - p \int_\Omega f v dx, \ \ v \in V \right\}$$

(où V *est défini ci-dessus) c'est-à-dire que la suite* u^ε *des solutions uniques de* $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ *converge vers la solution unique* u *de* $(\mathcal{P})$ *dans* $L^{p'}(0,1;L^p(\Omega'))$ *(et aussi dans* $L^\infty(0,1;L^p(\Omega'))$ *faible-* et uniformément sur les compacts de* $A^c = [0,1]\backslash A$*) et que* $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$ *tend vers* $J(u)$.

□

Dans ce contexte des matériaux stratifiés, l'homogénéisation de problèmes linéaires ou quasilinéaires dont les coefficients ne convergent pas nécessairement dans L^1 faible, mais convergent dans $M[0,1]$ faible *, a déjà été abordée dans [3], [5], [6] lorsque les coefficients limites sont "réguliers" de sorte que le problème limite $(\mathcal{P})$ est posé sur le même espace que les $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Au contraire ce n'est pas le cas ici et de nouvelles conditions au bord peuvent apparaître à la limite. Les premiers exemples de cette sorte sont dus à E. Sanchez-Palencia [8]. Une théorie abstraite très générale a été développée par U. Mosco [7]. On trouve aussi dans [2] un cas singulier où les coefficients ne sont pas bornés dans L^1.

3. La démonstration du résultat de perturbation singulière et d'homogénéisation. Nous appliquons le Théorème 1. On pose $V^\varepsilon = W_L^{1,p}(\Omega)$, $W = L^{p'}(0,1;L^p(\Omega'))$, V est défini ci-dessus et $\mathcal{V}$ est donné par

$$(8) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{V} = \{ v \in \mathcal{C}_A([0,1];\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}')) \ ; \ \exists\, \psi \in \mathcal{C}_{A^c}([0,1];\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}')) \ : \\ \qquad\qquad v(x_1,x') = \displaystyle\int_{[0,x_1[} \psi(t,x') db_1(t) \Big\}. \end{array}$$

La vérification des hypothèses (H1) et (H2) fait l'objet du

Lemme 1 : *Soit* $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *une suite d'éléments de* $W_L^{1,p}(\Omega)$ *tels que* $\operatorname{Sup}_\varepsilon J^\varepsilon(v^\varepsilon) < +\infty$.
Alors
(i) $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *est relativement compacte dans* $L^{p'}(0,1;L^p(\Omega'))$ *(et dans* $C^0([\alpha,\beta];L^p(\Omega'))$*, si* $A \cap [\alpha,\beta] = \emptyset$*),*
(ii) *toute limite* v *dans* $L^{p'}(0,1;L^p(\Omega'))$ *d'une sous-suite* $\left\{v^{\varepsilon'}\right\}_{\varepsilon'}$ *de* $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *appartient à* V *et* $\liminf_{\varepsilon'} J^{\varepsilon'}(v^{\varepsilon'}) \geq J(v)$.

La vérification de (H3) est divisée en

Lemme 2 : *$\mathcal{V}$ est dense dans V,*

Lemme 3 : $\forall\, v \in \mathcal{V},\ \exists\, v^\varepsilon \in W_L^{1,p}(\Omega),\ \limsup_\varepsilon J^\varepsilon(v^\varepsilon) \leq J(v)$.

La preuve du Lemme 3 se fait comme dans [3], [5], [6] en posant (voir (8))

$$v^\varepsilon(x_1, x') = \int_0^{x_1} \psi(t, x') b_1^\varepsilon(t) dt$$

et en utilisant la convergence uniforme des v^ε (resp. $\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_i}$, $i \geq 2$) sur tout $[\alpha, \beta] \times \bar{\Omega}'$ dès que $[\alpha, \beta] \cap A = \emptyset$.

La preuve du Lemme 2 utilise l'espace intermédiaire

$$\mathcal{W} = \Big\{ v \in \mathcal{C}_A([0,1]; \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}'))\ ;\ \exists\, \psi \in L^p_{b_1}([0,1]; \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}'))\ : \quad v(x_1, x') = \int_{[0, x_1[} \psi(t, x') db_1(t) \Big\}.$$

On remarque que tout élément de V admet une écriture de ce type avec ψ_1 à la place de ψ. On montre par convolution en x' que $\mathcal{W}$ est dense dans V. Puis on montre que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{W}$ pour la norme de V, en utilisant le procédé de moyennisation introduit dans [2] et développé dans [5]. Pour cela, à $v(x_1, x') = \int_{[0, x_1[} \psi(t, x') db_1(t)$ avec ψ dans $L^p_{b_1}([0,1]; \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}'))$, on associe une suite ψ^m de fonctions en escalier par rapport à x_1, constantes sur des intervalles I_k^m $(k = 1, ..., m)$ de longueurs plus petites que $2/m$:

$$\psi^m(I_k^m, x') = [b_1(I_k^m)]^{-1} \int_{I_k^m} \psi(t, x') db_1(t) \quad \text{si } b_1(I_k^m) > 0,\ 0 \text{ sinon.}$$

On montre alors que $\psi^m \rightharpoonup \psi$ faiblement dans $L^p_{b_1}(\Omega)$. Grâce au lemme de Mazur, quitte à remplacer ψ^m par une combinaison convexe des ψ^n, $n \geq m$, on peut supposer que $\psi^m \to \psi$ fortement dans $L^p_{b_1}(\Omega)$. La preuve de la convergence de $\frac{\partial v^m}{\partial x_i}$ vers $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ $(i \geq 2)$ dans $L^p_{b_i}(\Omega)$ utilise le fait que (4) entraîne $\max_k b_1(I_k^m) b_i(I_k^m) \to 0$ quand $m \to \infty$.

Pour le Lemme 1, la preuve de (i) se fait comme dans [5] : estimations a priori et utilisation du théorème de J. Simon [9]. Celle de (ii) est tout à fait nouvelle et repose sur le lemme suivant (reprenant les notations qui précèdent le Théorème 2).

Lemme 4 : *Soient μ^ε et μ des mesures positives sur $[0,1]$ telles que $\mu^\varepsilon \rightharpoonup \mu$ dans $M[0,1]$ faible * ; soient g^ε des fonctions de $L^p_{\mu^\varepsilon}(\Omega)$ telles que $\operatorname{Sup}_\varepsilon \|g^\varepsilon\|_{L^p_{\mu^\varepsilon}(\Omega)} < +\infty$. Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe g dans $L^p_\mu(\Omega)$ telle que*

$$g^\varepsilon \mu^\varepsilon \rightharpoonup g\mu \text{ faiblement } * \text{ dans } M([0,1]; L^p(\Omega')) \text{ dual de } C^0([0,1]; L^{p'}(\Omega'))$$

et telle que

$$\|g\|_{L^p_\mu(\Omega)} \leq \liminf \|g^\varepsilon\|_{L^p_{\mu^\varepsilon}(\Omega)}\,.$$

Pour montrer le Lemme 1, (ii), on applique le Lemme 4 avec successivement

$$\cdot\ \mu^\varepsilon = b_1^\varepsilon,\ \ \mu = b_1,\ \ g^\varepsilon = a_1^\varepsilon \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1},$$
$$\cdot\ \mu^\varepsilon = b_i^\varepsilon,\ \ \mu = b_i,\ \ g^\varepsilon = \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_i}\ \ (i \geq 2).$$

Enfin la preuve du Lemme 4 utilise un procédé de moyennisation du style de celui décrit plus haut. Les preuves détaillées seront publiées dans [4] où l'on considèrera également les problèmes linéaires associés à des matrices non (nécessairement) diagonales.

Références bibliographiques

[1] G. Dal Maso, *An Introduction to Γ-convergence*, Birkhaüser, 1993.

[2] B. Gustafsson, J. Mossino, C. Picard, Stratified materials allowing asymptotically prescribed equipotentials, *Arkiv for Matematik, 32,* 1994, 293-307.

[3] B. Gustafsson, J. Mossino, C. Picard, $H-$convergence for stratified structures with high conductivity, *Advances in Math. Sci. and Appl., 4,2,* 1994, 265-284.

[4] B. Gustafsson, B. Heron, J. Mossino, $H-$convergence and mesure limits for stratified media with low and high conductivities, en préparation.

[5] B. Heron, J. Mossino, C. Picard, Homogenization of some quasilinear problems for stratified media with low and high conductivities, *Diff. Int. Equ., 1,* 1994, 157-178.

[6] B. Heron, J. Mossino, $H-$convergence and regular limits for stratified media with low and high conductivities, *Applicable Anal., 57,* 1995, 271-308.

[7] U. Mosco, Composite media and asymptotic Dirichlet forms, *J. Funct. Anal., 123, 2,* 1994, 368-421.

[8] E. Sanchez-Palencia, Problèmes de perturbations liées aux phénomènes de conduction à travers des couches minces de grande résistivité, *J. Math. Pures Appl., 53,* 1974, 251-270 ; voir aussi Non Homogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Notes in Phys., 127,* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[9] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1987, 65-96.