

Geometrisk algebra, konform geometri och gemensamma kurvor

Elias Riedel Gårding

eliasrg@kth.se

Handledare: DOUGLAS LUNDHOLM, Gustav Zickert, Ozan Öktem

KTH Matematik

GEOMETRISK ALGEBRA

Introduktion

Geometrisk algebra, även känd som Cliffordalgebra, är en generalisering av konventionell vektoralgebra, motiverad av en önskan att konstruera en associativ produkt $\mathbf{x}\mathbf{y}$ mellan vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Om en sådan produkt relateras till den vanliga skalärprodukten $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ genom att tvingas uppfylla den definierande ekvationen

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad \text{för alla vektorer } \mathbf{x} \quad (1)$$

erhålls den *geometriska produkten*, som visar sig vara mycket väl lämpad för att beskriva geometri.

I $\mathbb{R}^n = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kan (1) skrivas om till

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Exempelvis blir $\mathbf{e}_2(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 3 - 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, vilket inte går att förenkla ytterligare. Elementet $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ har en geometrisk tolkning som planet som spänns upp av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

I det tredimensionella rummet $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ blir den geometriska algebran åttadimensionell;

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3) = \text{Span}\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}. \quad (3)$$

Det finns alltså en skalär, tre vektorer, tre bivektorer och en trivektor; skalären representerar origo, vektorerna representerar linjer, bivektorerna representerar plan och trivektorn representerar hela rummet.

Ett flertal nya operationer kan definieras i termer av den geometriska produkten, däribland den *yttre produkten* $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, som algebraiskt beskriver linjärt beroende, och en generaliserad inre produkt $\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{B}$. Det ortogonala komplementet till ett linjärt delrum kan beräknas via *dualen* $\mathbf{A}^c$, och *meet-produkten* $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ beskriver skärningen mellan två linjära delrum.

Rotationer och reflektioner kan uttryckas utan att lämna den geometriska algebran (konventionell vektoralgebra kräver här matriser):

$$\text{refl}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}^{-1} \quad (4)$$

$$\text{rot}_{\mathbf{P}, \theta}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\mathbf{P}\theta}{2}\right) \mathbf{x} \exp\left(\frac{\mathbf{P}\theta}{2}\right) \quad (5)$$

där $\mathbf{P}$ är rotationsplanet och θ är rotationsvinkeln.

Av dessa skäl och många andra framstår geometrisk algebra som ett överlägset system för vektoralgebra och ett universellt språk för geometri som förtjänar att anammas i långt bredare kretsar.

Disposition

- 1 Detaljerad introduktion till geometrisk algebra på student-nivå
- 2 Översikt av konform geometrisk algebra
- 3 Tillämpning på gemensamma kurvor i kryoelektronmikroskopi

Konform geometrisk algebra

Konform geometrisk algebra (CGA) är ett verktyg för att kringgå begränsningarna hos linjär algebra, specifikt geometrisk algebra, vid beskrivning av geometri. Bara en liten andel av sedvanliga transformationer och geometriska objekt är linjära transformationer respektive linjära delrum. I CGA inbäddas $\mathbb{R}^3$ i det femdimensionella rummet $\mathbb{R}^{4,1}$, vilket konstrueras genom att utöka $\mathbb{R}^3$ med två nya basvektorer $\mathbf{e}_+$ och $\mathbf{e}_-$ sådana att $\mathbf{e}_+^2 = 1$ och $\mathbf{e}_-^2 = -1$ ($\mathbb{R}^{4,1}$ är med andra ord ett Minkowskium, i likhet med rumtiden i speciell relativitetsteori). Linjära delrum i $\mathbb{R}^{4,1}$ representerar då följande objekt i $\mathbb{R}^3$:

- Punkter
- Linjer
- Plan
- Punktpar (nolldimensionella sfärer)
- Cirklar
- Sfärer

Eftersom dessa delrum är linjära uttrycks de naturligt med geometrisk algebra. På så sätt kan skärningen mellan två objekt av ovanstående typer beräknas algebraiskt.

Den konforma inbäddningen $\mathcal{C}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{4,1}$ har sina rötter i stereografisk projektion (Figur 1).

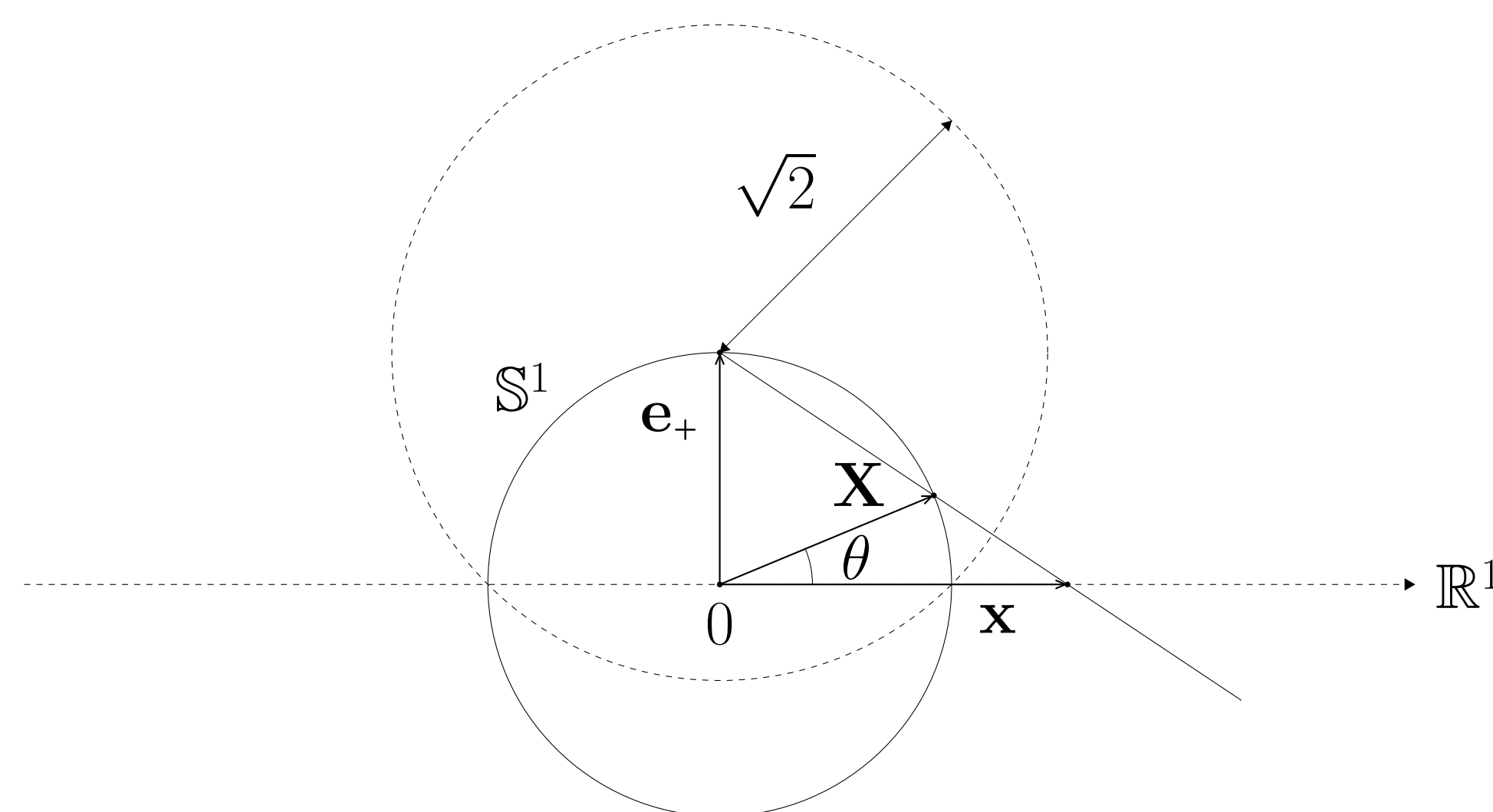
En stor grupp av transformationer i $\mathbb{R}^3$, de *konforma avbildningarna* (lokalt vinkelbevarande; jfr. komplex analys) blir reflektioner eller rotationer i $\mathbb{R}^{4,1}$, och kan därmed skrivas på formen

$$\mathbf{X} \mapsto \pm \mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{V}^{-1}. \quad (6)$$

Dessa transformationer är (i $\mathbb{R}^3$)

- Reflektioner $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}^{-1}$
- Rotationer $\mathbf{x} \mapsto \exp\left(-\frac{\mathbf{P}\theta}{2}\right) \mathbf{x} \exp\left(\frac{\mathbf{P}\theta}{2}\right)$
- Translationer $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$
- Dilationer $\mathbf{x} \mapsto s\mathbf{x}$
- Inversion $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/\mathbf{x}^2$ (spegling i enhetssfären)

och sammansättningar av dessa.



Figur 1: Stereografisk projektion från enhetscirkeln till den reella tallinjen, alternativt inversion i den streckade cirkeln.

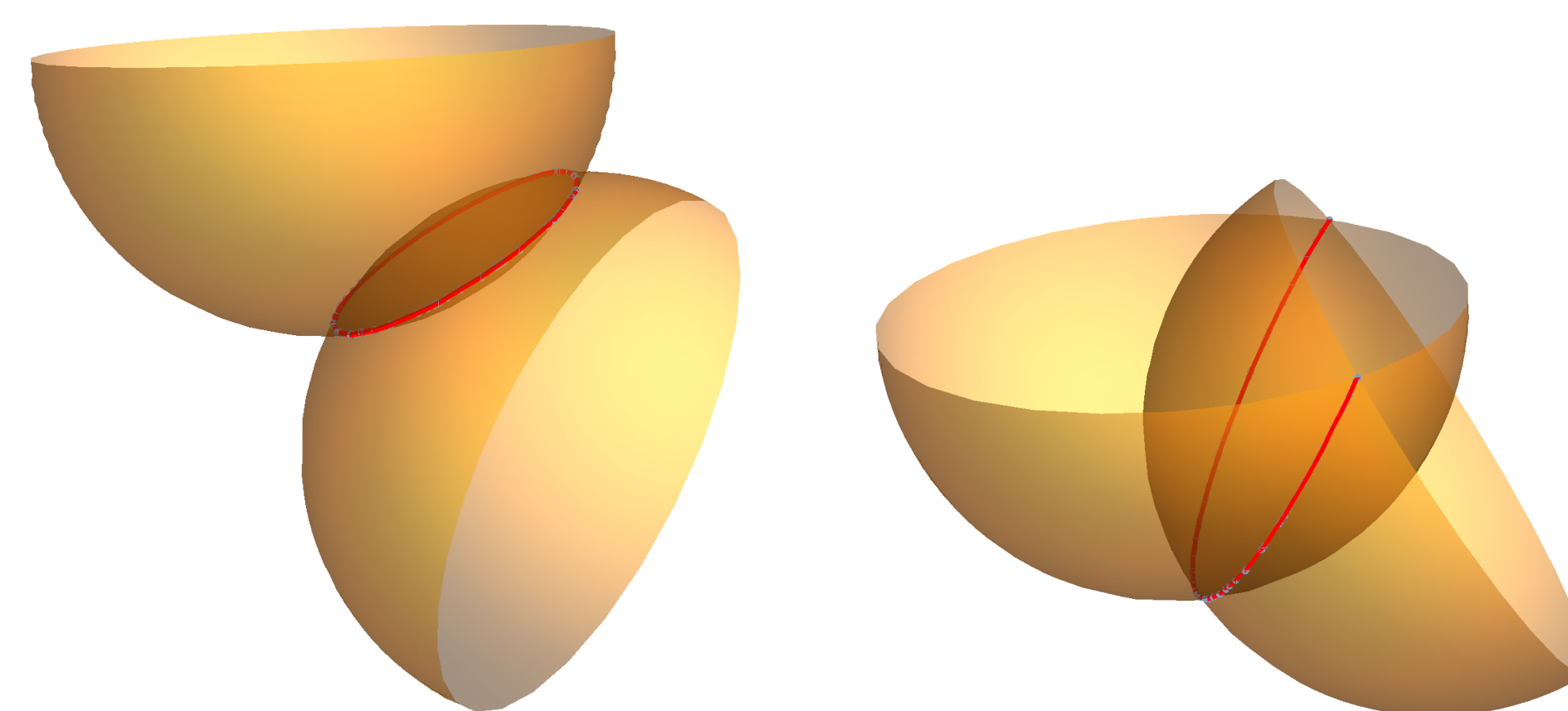
GEMENSAMMA KURVOR

Kryo-elektronmikroskopi

Kryo-elektronmikroskopi är en avbildningsteknik i vilken molekyler av intresse löses i vatten och sedan hastigt fryses så att de innesluts i en omgivning av amorf is. Proven kan sedan studeras med elektronmikroskop. Ett avgörande drag hos denna metod är att molekylernas rumsliga orientering är okänd. Med hjälp av många bilder av identiska molekyler från okända vinklar vill man således bestämma molekylen tredimensionella struktur.

Gemensamma kurvor

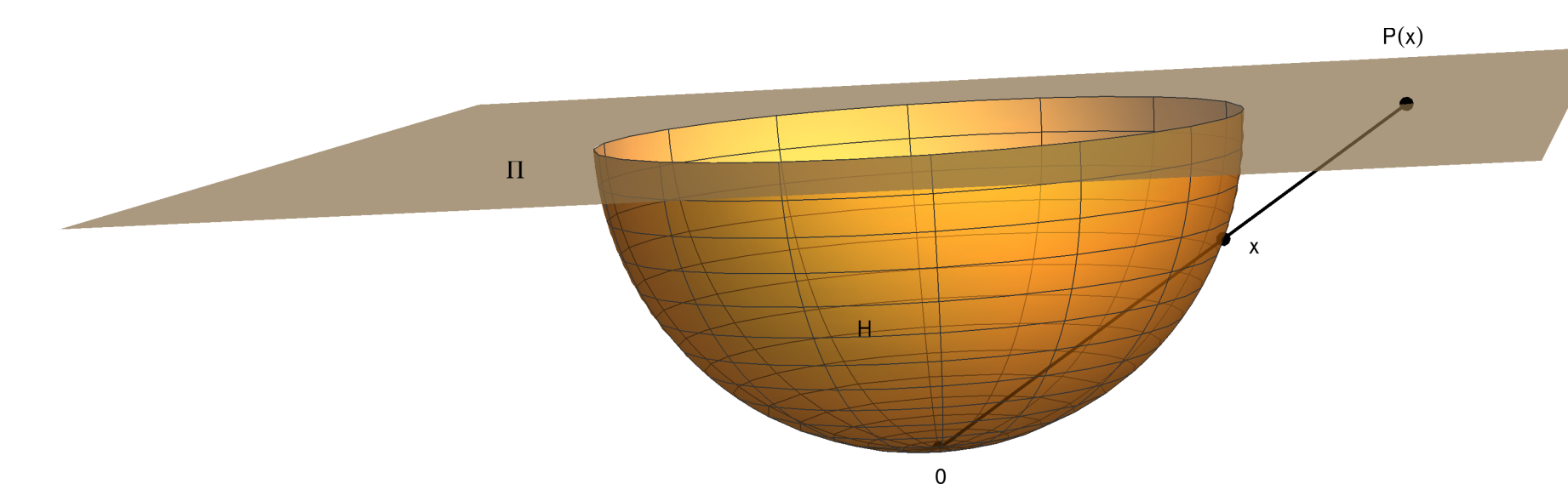
Givna är n elektronmikroskopbilder. Enligt en sats (en generalisering av "the Fourier slice theorem") kan Fouriertransformen av en bild relateras till Fouriertransformen av molekylen elektrostatiske potential. Potentialen blir då känd på *halvsfärer* med toppen i origo och okänd orientering. Skärningen mellan två av dessa är en cirkel eller ett cirkelsegment (Figur 2). Genom att söka efter gemensamma kurvor mellan bilderna motsvarande dessa skärningar kan halvsfärerna pussas ihop och potentialen därmed uppskattas.



Figur 2: Halvsfärer och deras skärningscirklar.

Omformulering i CGA

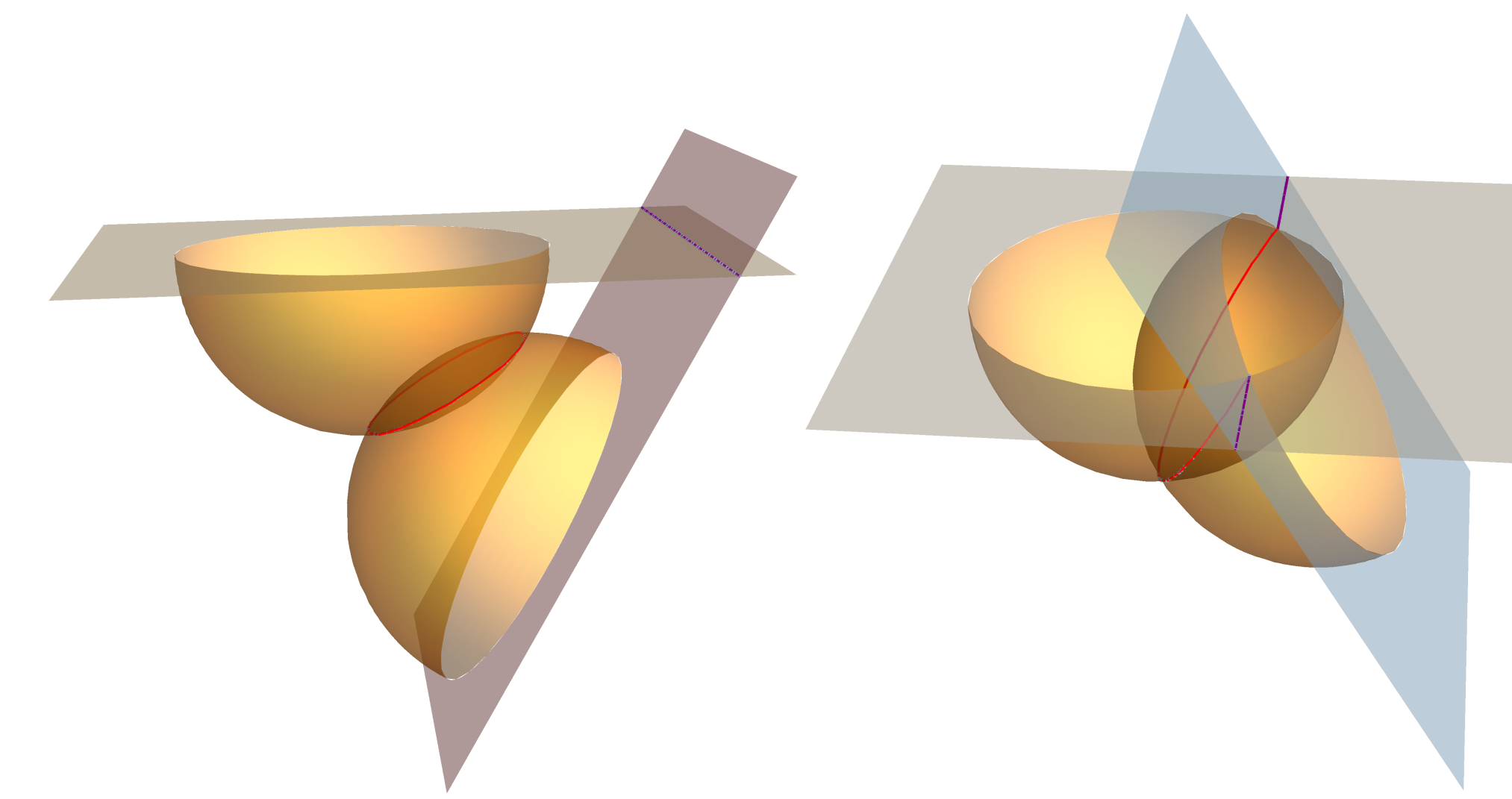
Sfärer och deras skärningskurvor uttrycks utmärkt i konform geometrisk algebra. Genom att översätta problemets alla ingående begrepp till CGA kan problemet skrivas om så att det i en viss mening blir linjärt. Tyvärr verkar detta vara av ringa praktiskt värde eftersom sökrymden måste få ökad dimension genom att originaldata kopieras flera gånger, och trots detta i själva verket inte blir linjär (utan ett sorts kägelsnitt).



Figur 3: Modifierad stereografisk projektion.

Omformulering via stereografisk projektion

Direkt tillämpning av CGA tycktes inte resultera i en praktiskt tillämpbar analysmetod. Med inspiration från CGA kan emellertid ett antal andra bildtransformationer konstrueras. Tre metoder upptäcktes: *stereografisk projektion*, *inversion* och *hyperplanssnitt*. Dessa kunde sedan visas vara helt ekvivalenta (Figur 1 visar sambandet mellan stereografisk projektion och inversion i två dimensioner); det räcker alltså att undersöka stereografisk projektion (Figur 3). Under denna transformation skickas halvsfärerna på plan och deras skärningscirklar på linjer (Figur 4).

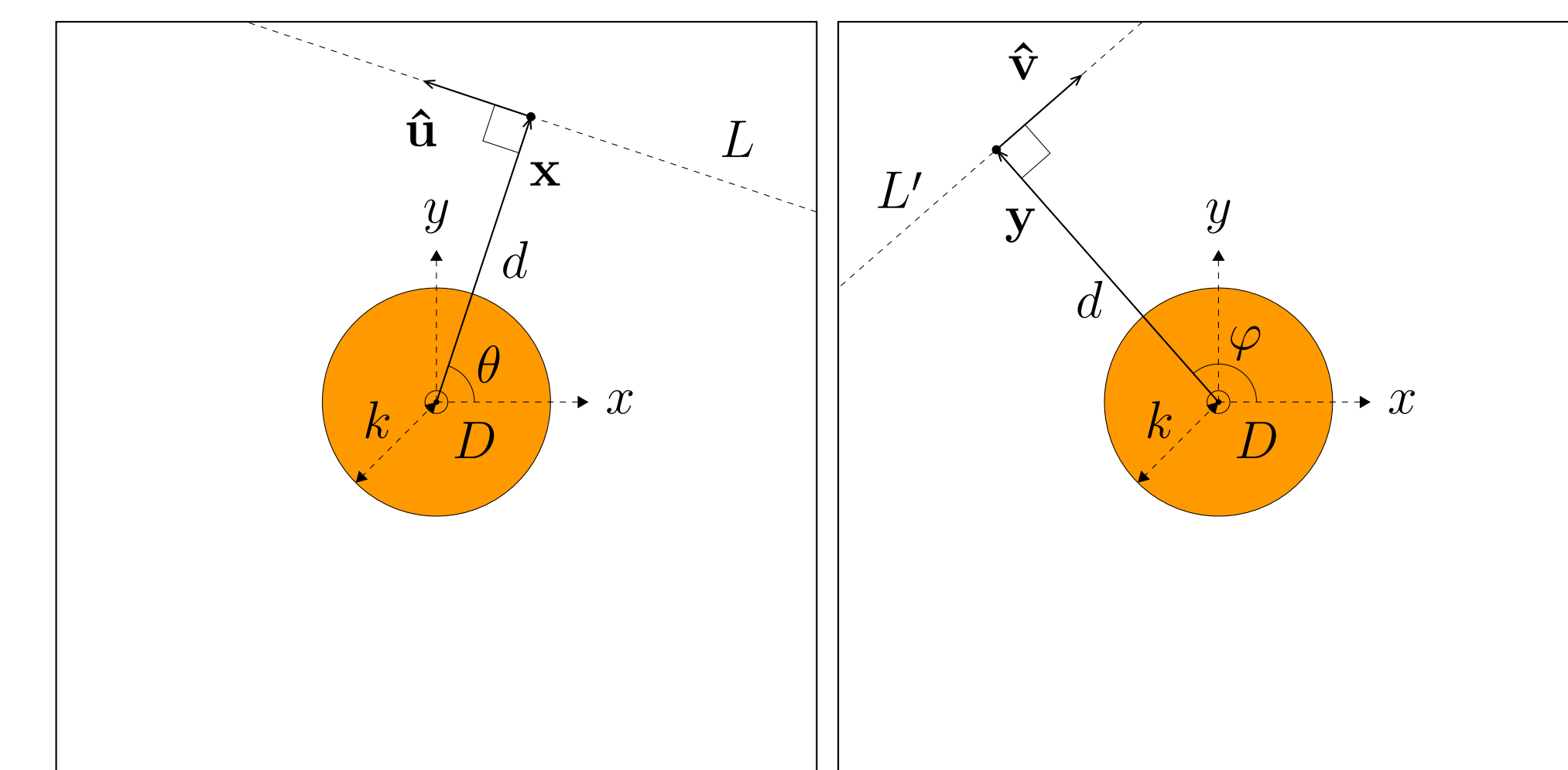


Figur 4: Transformerade halvsfärer och deras skärningslinjer.

Konkret skickas de tvådimensionella EM-bilderna genom avbildningen

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{k}{k - \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \mathbf{x} \quad (7)$$

där k är radien hos halvsfärerna. Problemet att identifiera de gemensamma kurvorna (ellipser i originalbilderna) har därmed reducerats till att finna gemensamma linjer i de transformerade bilderna (Figur 5, jfr. Figur 3). Det är ännu oklart till vilken grad detta är av praktisk nytta, eftersom data nära origo i originalbilderna hamnar mycket långt bort från origo i de transformerade bilderna.



Figur 5: En gemensam linje mellan två bilder, beskriven av parametrarna (d, θ, φ) .