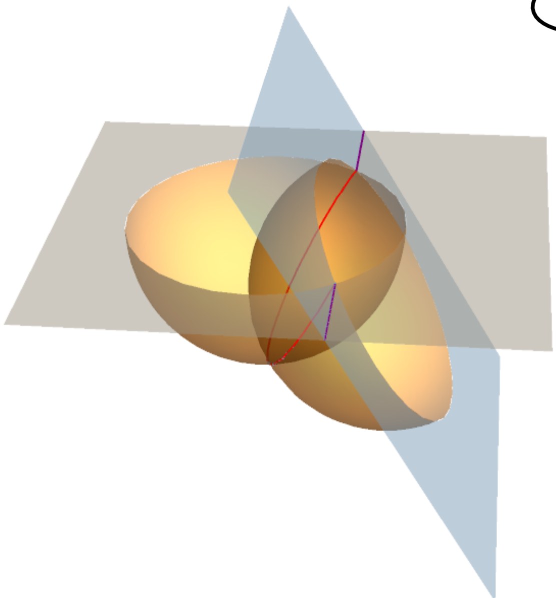
Geometric algebra, conformal geometry and the common curves problem

Elias Riedel Gårding, F14



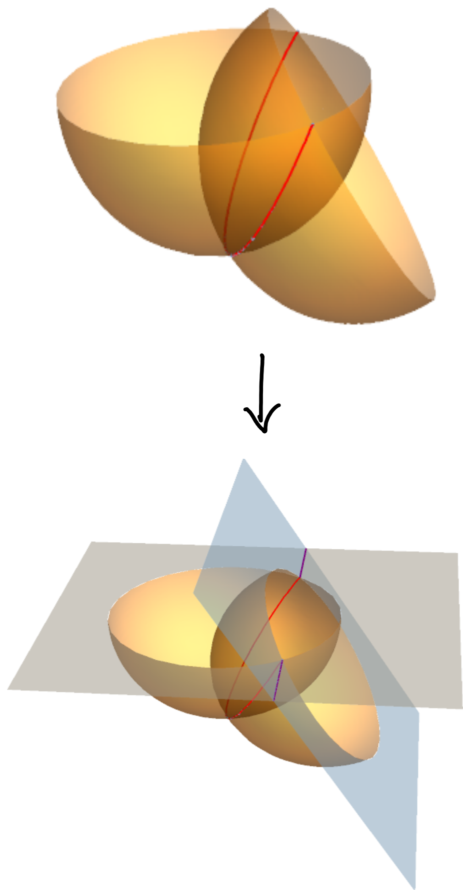
Handledare Douglas Lundholm
(Gustav Zickert, Ozan Öktem)

Översikt

1. Detaljerad introduktion till geometrisk algebra på studentnivå

2. Översikt av konform geometrisk algebra (CGA)

3. Tillämpning i kryo-elektronmikroskopi



Resultat

- Fler borde lära sig om geometrisk algebra!

- Bildtransformation $x \mapsto \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$ $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$,

  med viss potential för praktisk användning

Geometrisk algebra (Cliffordalgebra)

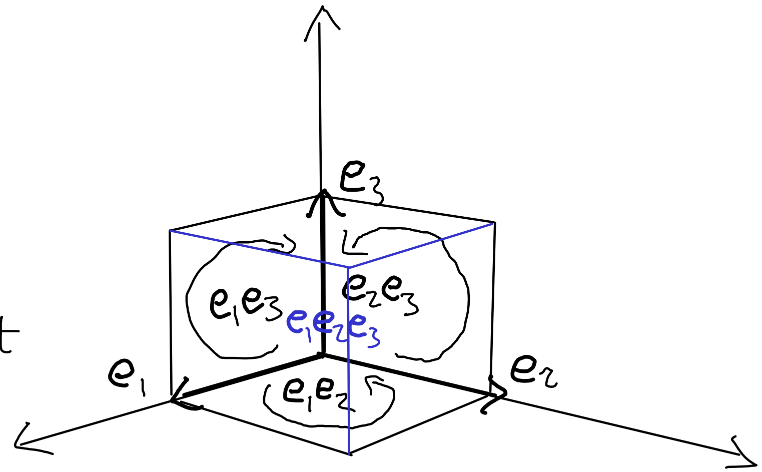
En ny produkt xy mellan vektorer

- Associativ: $x(yz) = (xy)z$
- Hör ihop med skalärprodukten: $\underline{xx = x \cdot x}$ $\quad (= \|x\|^2)$

Enkel räkneregel: $e_i e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ -e_j e_i & i \neq j \end{cases}$

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

$$G(\mathbb{R}^3) = \text{Span}\{\underbrace{1}_{\text{origo}}, \underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{linjer}}, \underbrace{e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_2e_3}_{\text{plan}}, \underbrace{e_1e_2e_3}_{\text{hela rummet}}\}$$



Kombinerar skalärprodukt och kryssprodukt till en och samma!

Linjära delrum

Relaterad produkt: den yttre produkten $e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0 & i = j \\ e_i e_j & i \neq j \end{cases}$

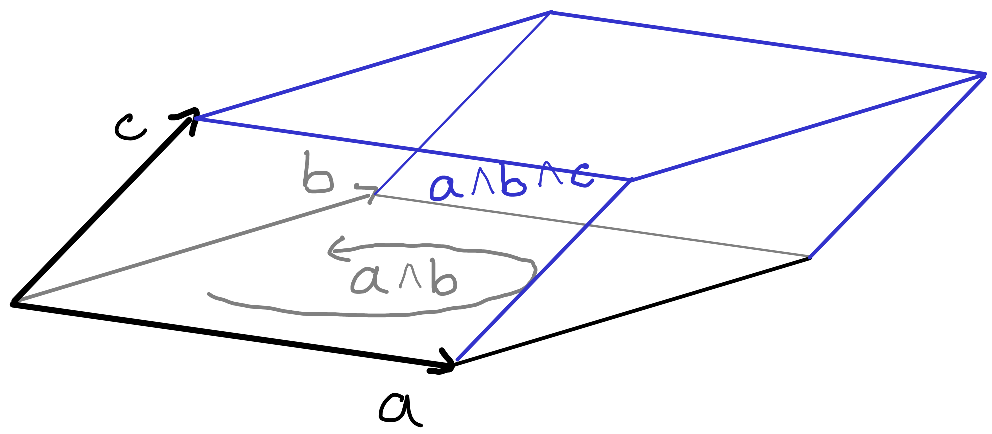
Sats: $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k = 0 \iff x_1, x_2, \ldots, x_k$ linjärt beroende.

Så $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$ "representerar" $\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Finns algebraiska operationer för

- Skärning $V \cap W$
- Summa $V + W$
- Ortogonalt komplement $V^\perp$

av linjära delrum V och W.

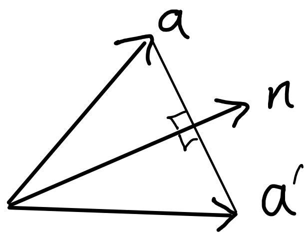


Euklidiska transformationer

(linjära isometrier)

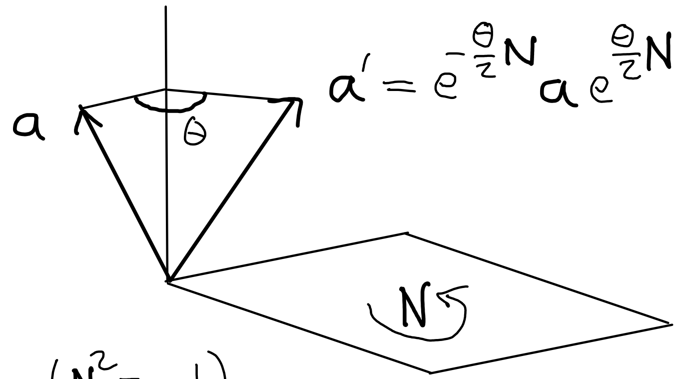
Rotation

Spegling



$a' = nan$

$(n^2 = 1)$



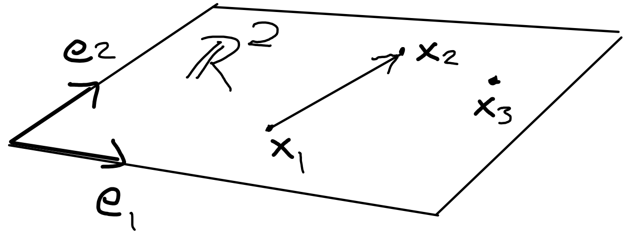
$a' = e^{-\frac{\theta}{2}N} a \, e^{\frac{\theta}{2}N}$

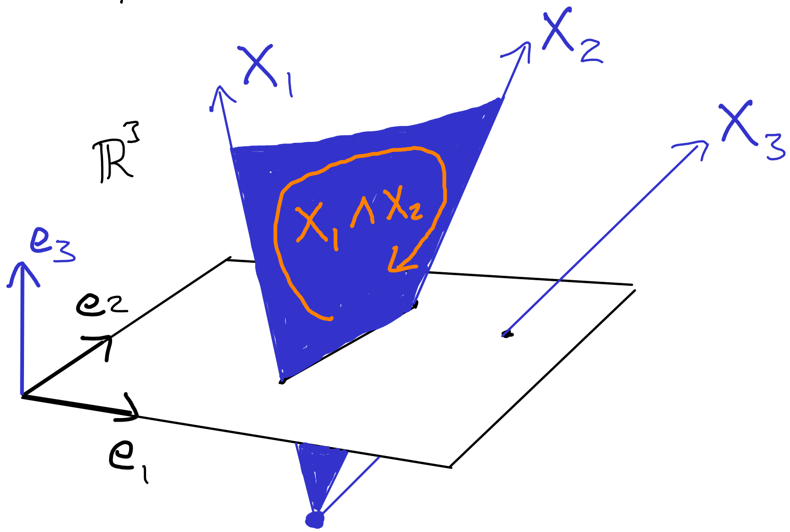
$(N^2 = -1)$

Mer! Translation ...?

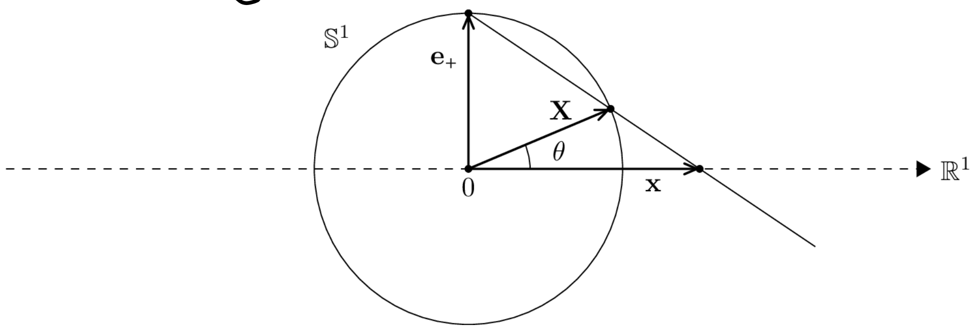
Konform geometri

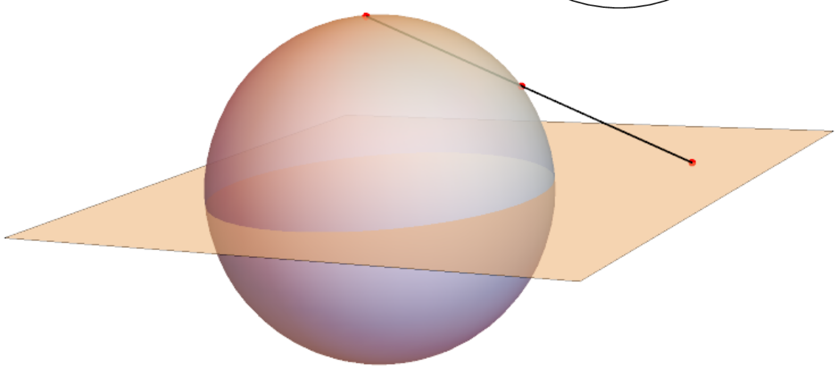
Kombination av **projektiv geometri** (representera punkter, linjer etc. som inte går genom origo)





och **stereografisk projektion**

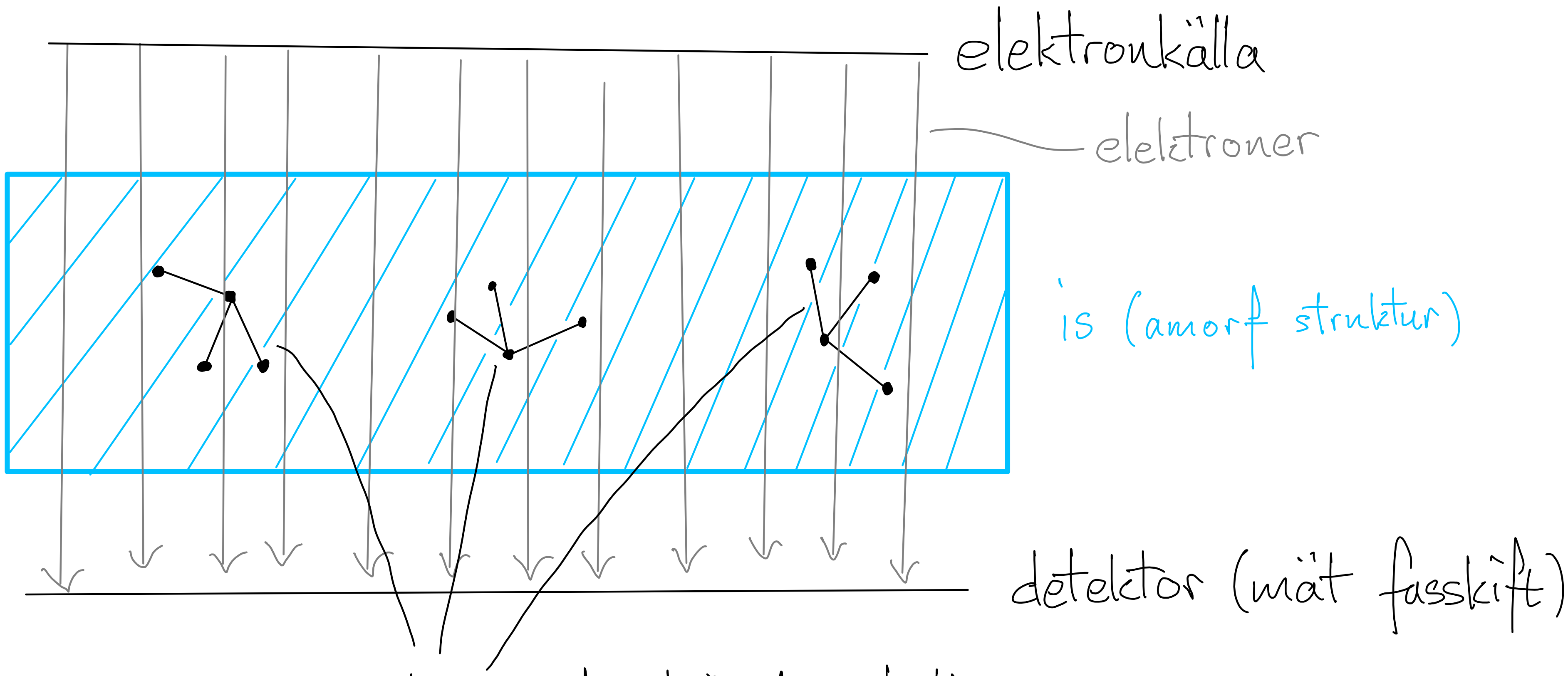




Nya linjära delrum

- Punkter
- Linjer
- Plan
- Punktpar
- Cirklar
- Sfärer

Kryo-elektronmikroskopi (cryo-EM)



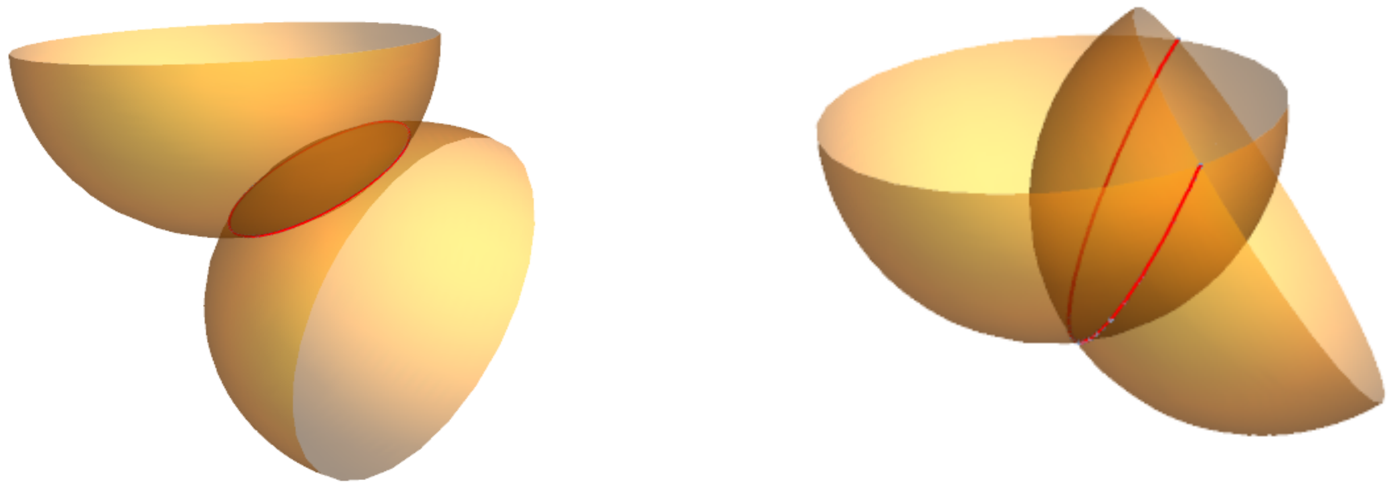
Många bilder av identiska molekyler. Pussla ihop 3D-strukturen?

Gemensamma kurvor

Mål: Approximera $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ (~ Fouriertransform av 3D-struktur hos molekyl).

Vet: $f|_{H_1}, f|_{H_2}, \ldots, f|_{H_n}$ där H_i är halvsfärer genom origo.

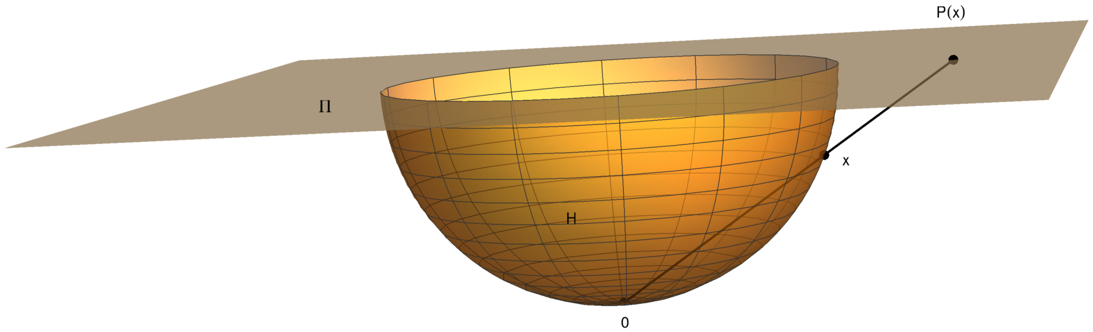
Metod: Två halvsfärer skär varandra i ett cirkelsegment genom origo.
Leta efter gemensamma cirkelsegment mellan två bilder.

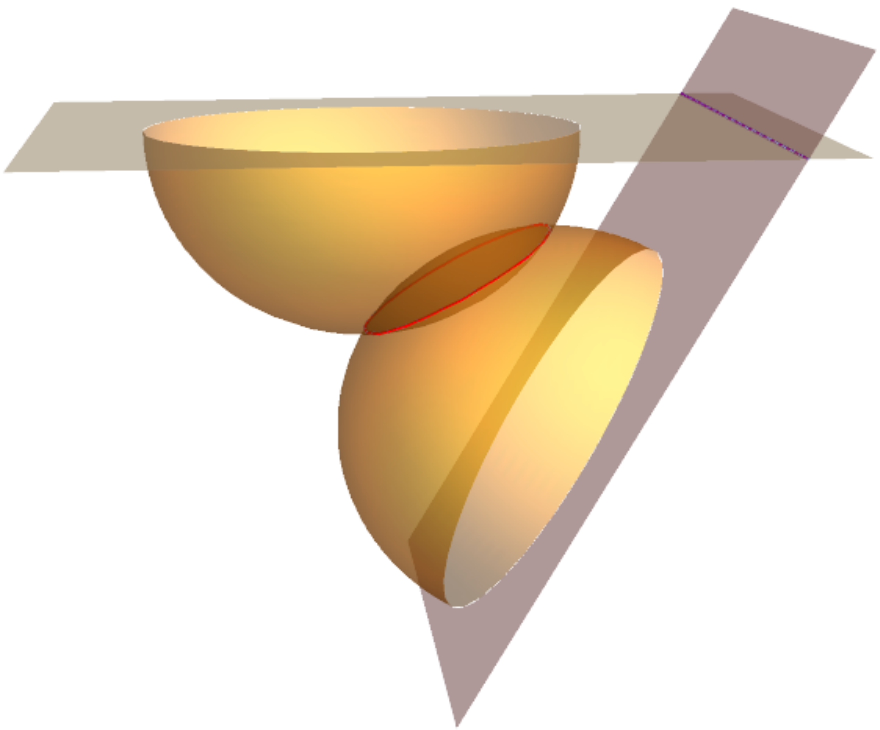


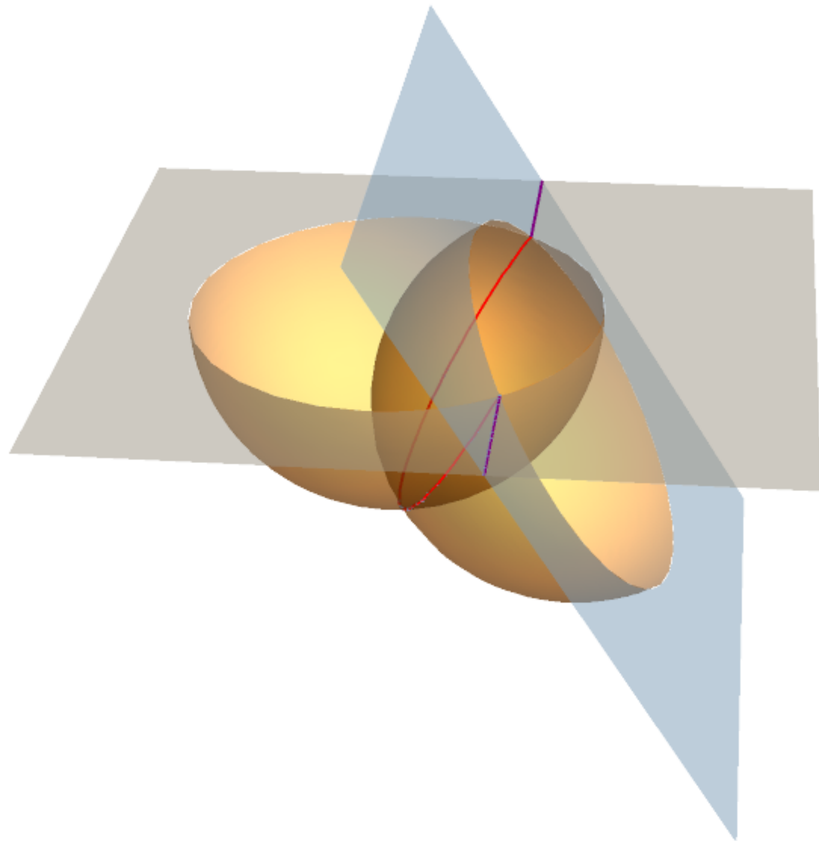
Skriv om till ett mer linjärt problem?

Tre idéer: Stereografisk projektion, inversion, skära hyperplan.

Resultat: Alla ekvivalenta, $x \mapsto \frac{x}{x^2}$.



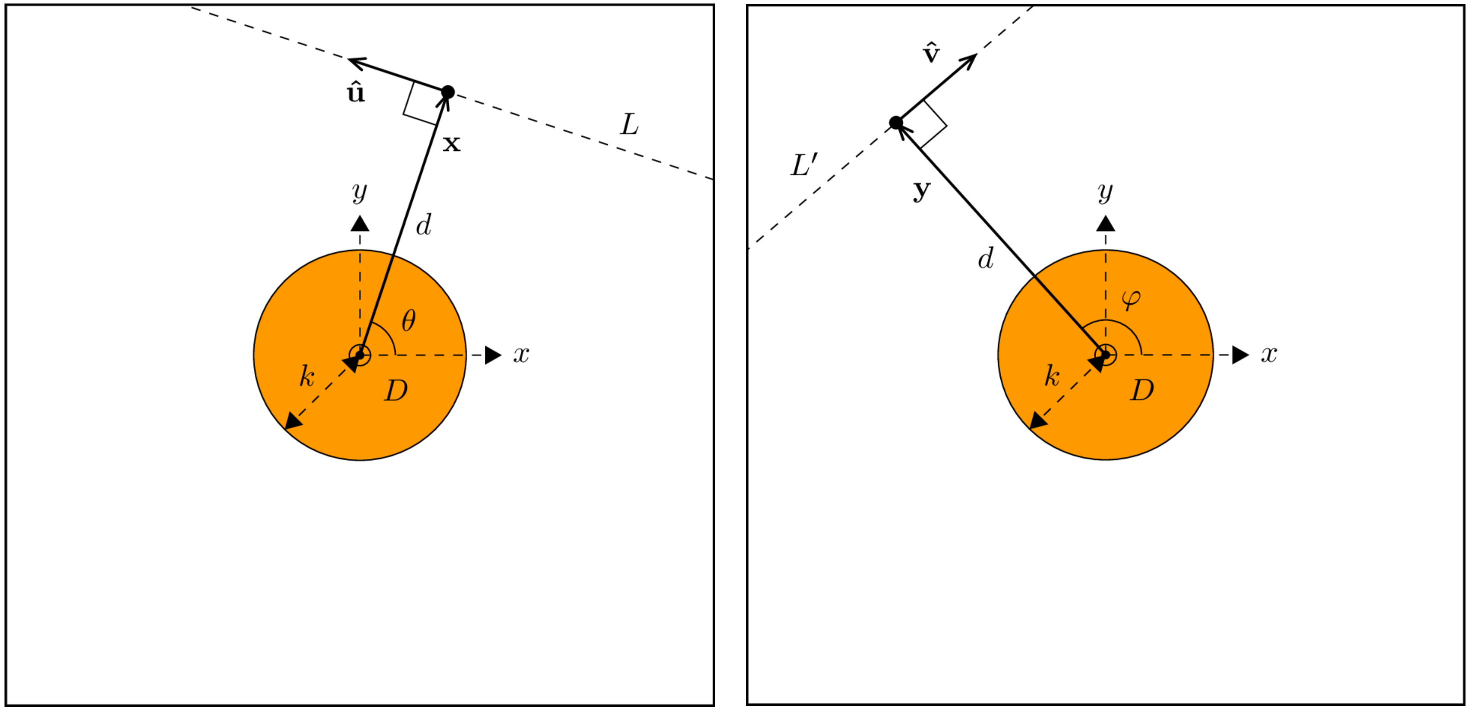




Konkret i 2D

Transformera bilderna genom $x \mapsto \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Problemet blir då att hitta matchande linjer (d, θ, φ).



Praktiskt tillämpbart? Upp till experterna.