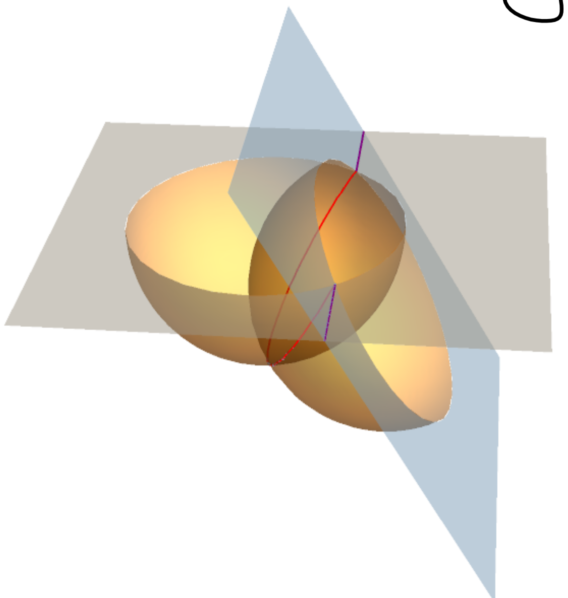
Geometric algebra, conformal geometry and the common curves problem

Elias Riedel Gårding, F14



Handledare Douglas Lundholm
(Gustav Zickert, Ozan Öktem)

Mitt arbete

1. Detaljerad introduktion till geometrisk algebra på student-nivå

2. Översikt av konform geometrisk algebra (CGA)

3. Tillämpning på Common Curves-problemet från kryo-EM

Geometrisk algebra (Cliffordalgebra)

<u>Def</u> Den geometriska produkten xy

- "Vanliga" egenskaper: $a(b+c) = ab + ac$, $1a = a$, ...
- Associativ: $a(bc) = (ab)c$

$\Big\}$ fri associativ algebra över $\mathbb{R}^n$

- För alla vektorer: $x^2 = \|x\|^2$

Konsekvens: $e_i e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ -e_j e_i & i \neq j \end{cases}$ (Enkelt att räkna med!)

(betrakta $(e_i + e_j)^2$)

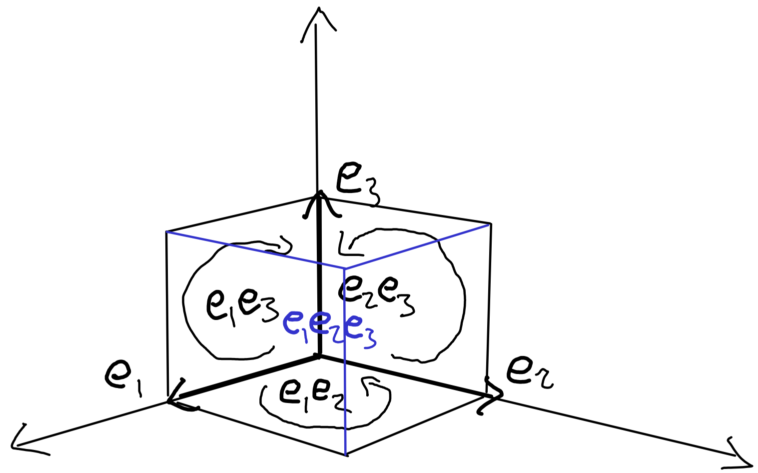
<u>Ex</u> $$(x_1 e_1 + y_1 e_2)(x_2 e_1 + y_2 e_2) = \underbrace{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}_{x \cdot y} + \underbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1) e_1 e_2}_{x \wedge y \ (\approx x \times y)}$$

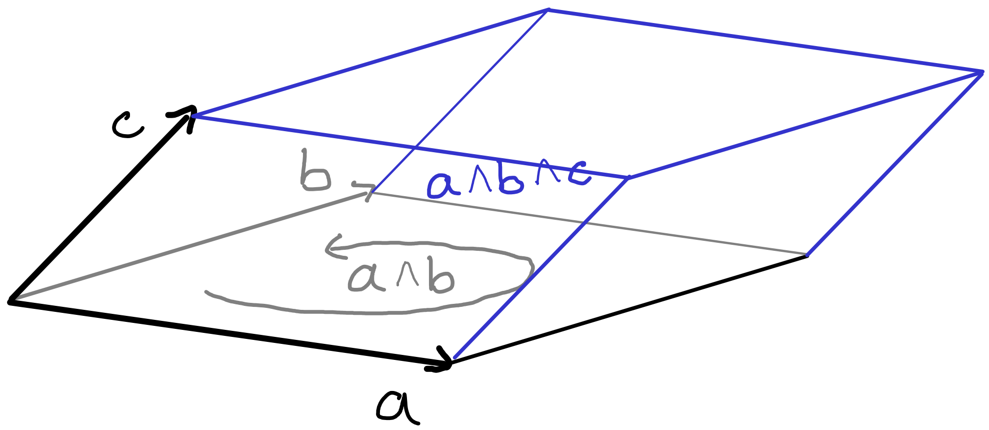
<u>Ex</u> $$x \cdot y = \frac{xy + yx}{2}, \qquad x \times y = \frac{xy - yx}{2} e_3 e_2 e_1 \quad \text{(3D)}$$

Geometrisk tolkning

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Span}\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}$$



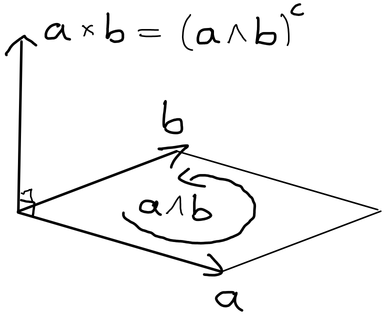


Yttre produkt $\quad e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0 & i=j \\ e_ie_j & i\neq j \end{cases}$

Linjära delrum

$$\overline{x_1\wedge \dots \wedge x_k} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \wedge \dots \wedge x_k)\wedge x = 0\} = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$$

Komplement $\quad \overline{B}^{\perp} = \overline{B^c}, \quad B^c = Be_n \dots e_1$

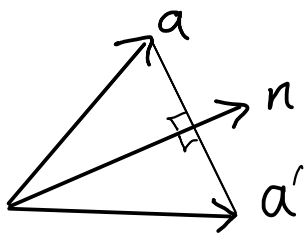


Skärning $\quad \overline{(A^c \wedge B^c)^c} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Euklidiska transformationer

(linjära isometrier)

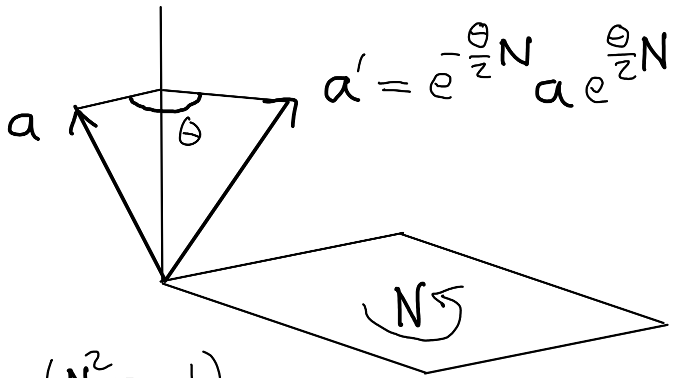
Spegling



$a' = nan$

$(n^2 = 1)$

Rotation



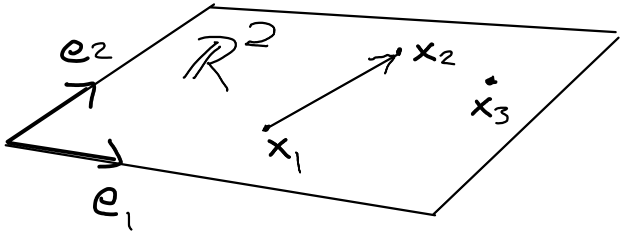
$a' = e^{-\frac{\theta}{2}N} a \, e^{\frac{\theta}{2}N}$

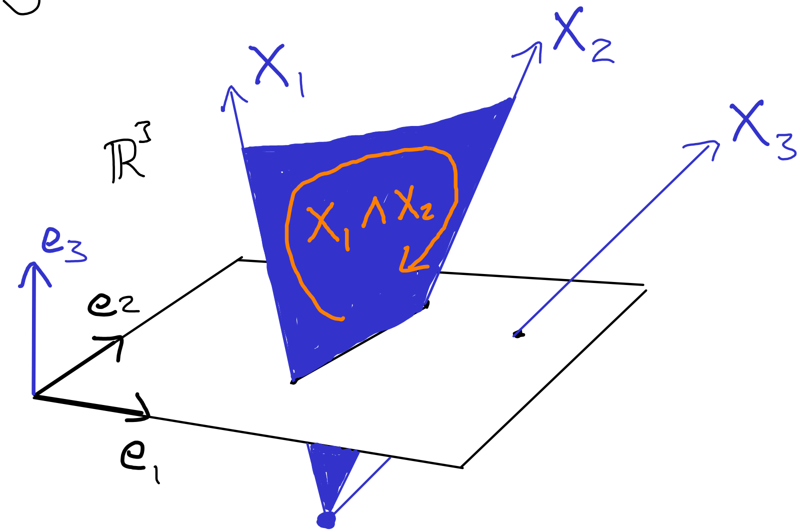
$(N^2 = -1)$

Mer! Translation...?

Projektiv geometri

Representera punkter, linjer etc.
som inte går genom origo





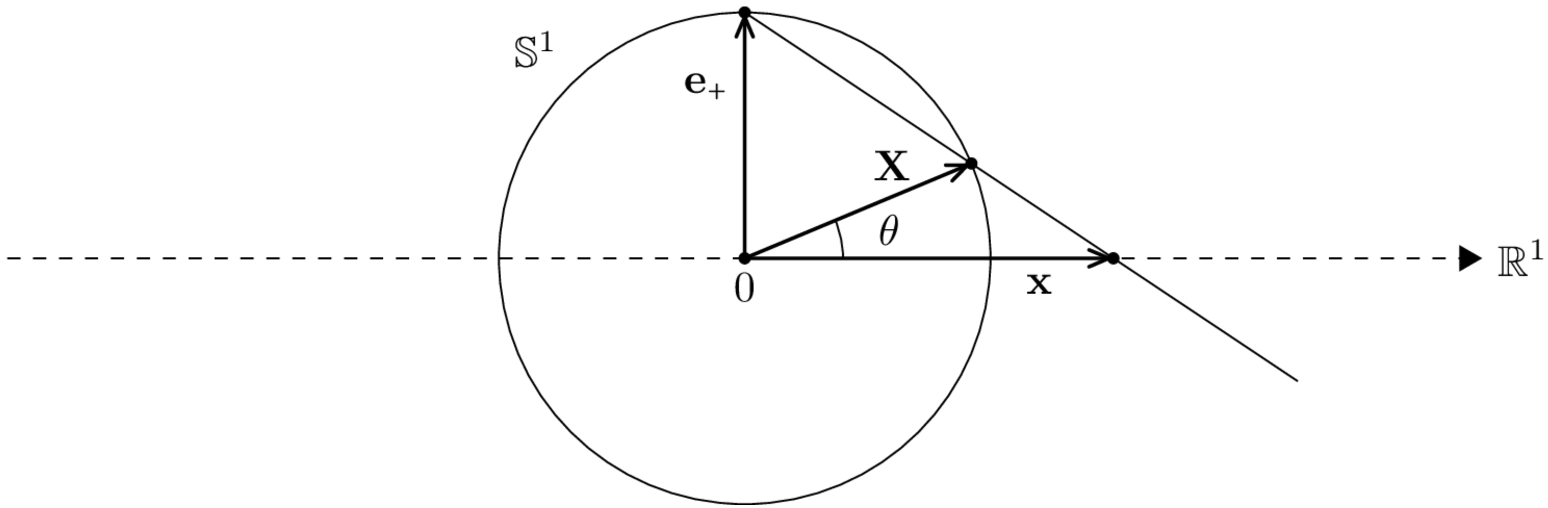
$$x \longmapsto x + e_3$$

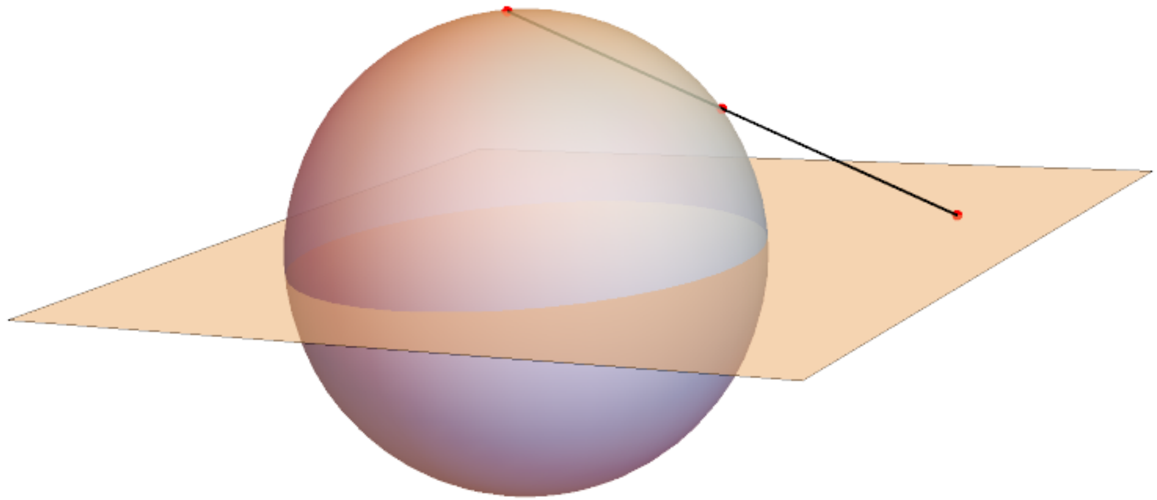
Hitta skärning mellan linjer, projicera punkt på linje etc:

Algebraiska operationer på linjära delrum!

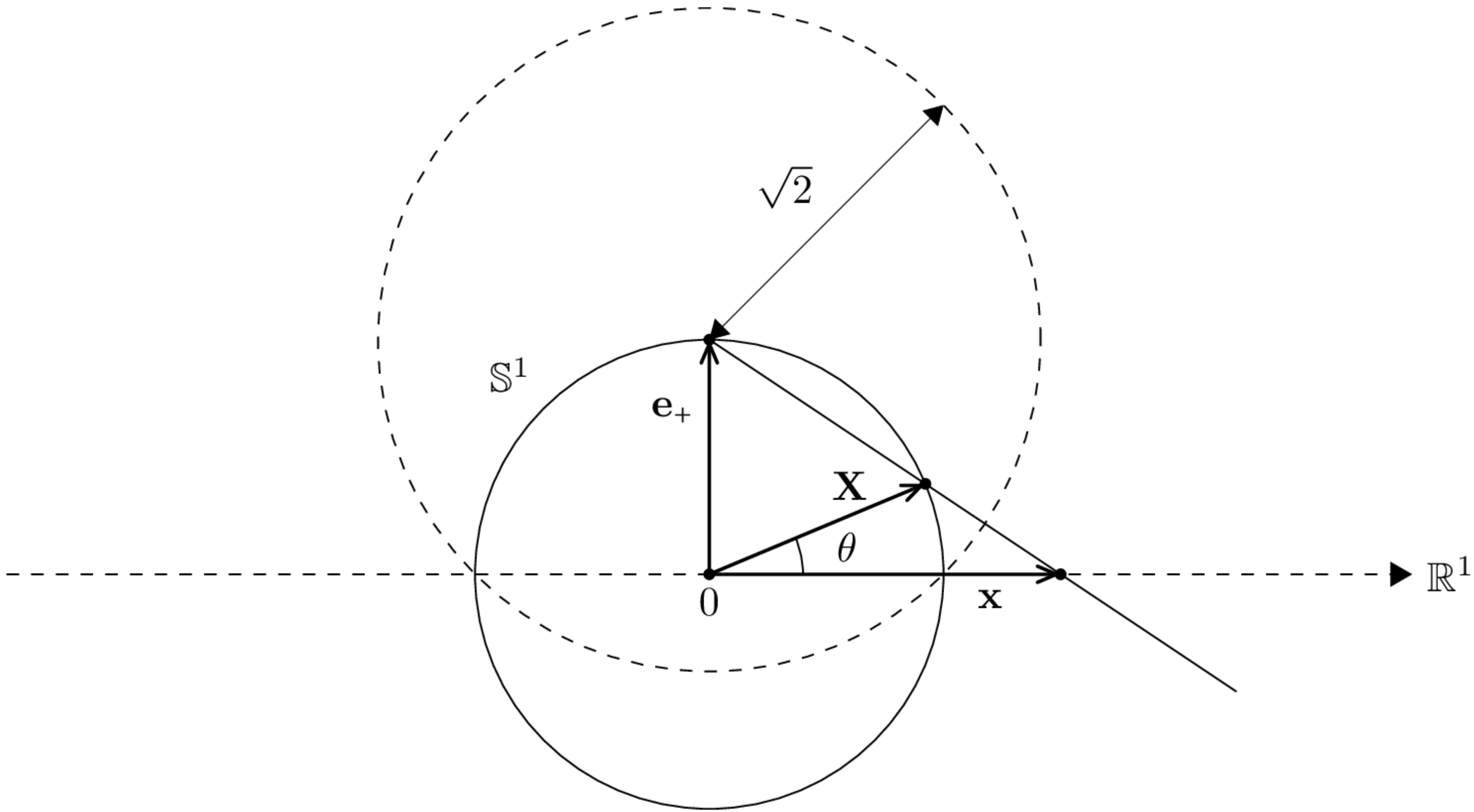
Men avstånd, vinklar etc uttrycks inte naturligt.

Stereografisk projektion

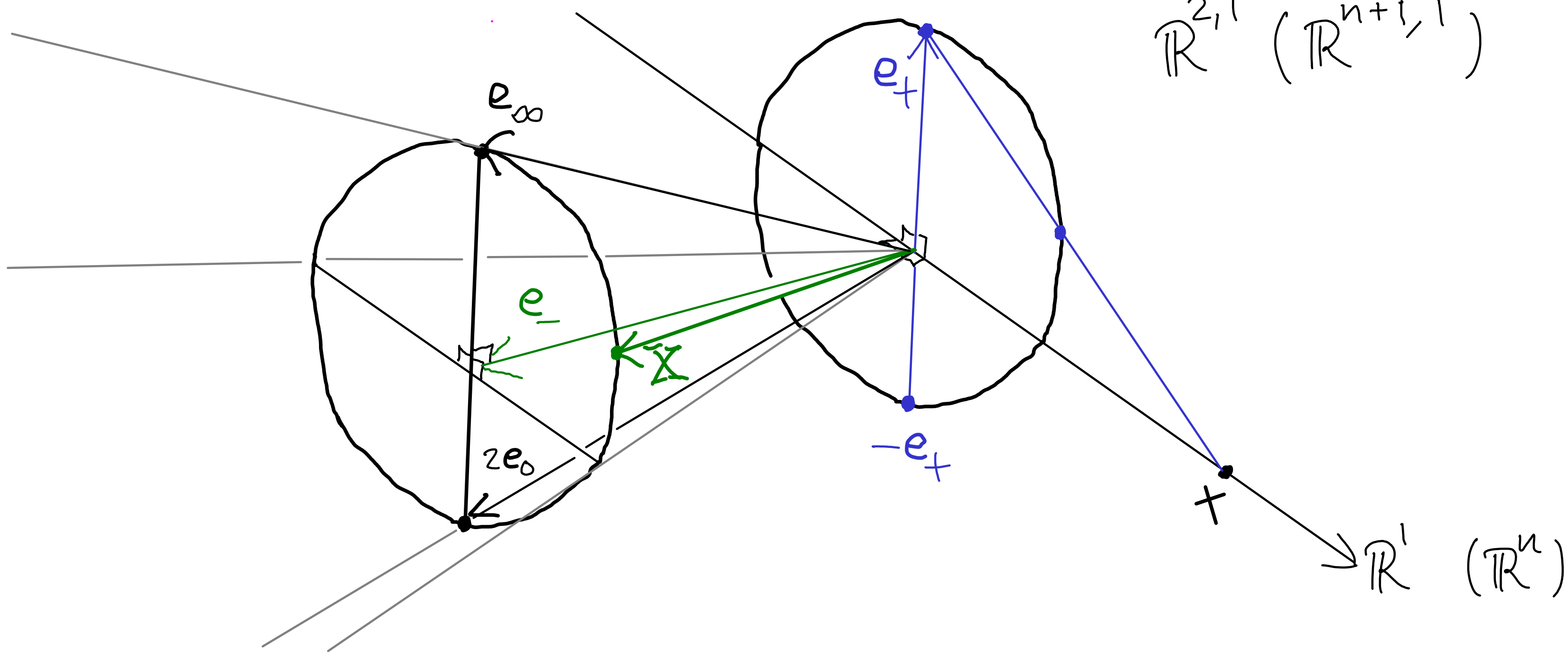




(Sidoobservation: Stereografisk projektion är inversion)



Konform geometri



$$X \propto \boxed{e(x) := x + \frac{x^2}{2} e_\infty + e_0} \qquad \begin{pmatrix} e_\infty := e_- + e_+ \\ e_0 := \dfrac{e_- - e_+}{2} \end{pmatrix}$$

$$e_-^2 := -1 \implies \boxed{e(x)^2 = 0}$$

Geometriska objekt & konforma avbildningar

Punkter, linjer, plan, punktpar, cirklar, sfärer i $\mathbb{R}^n$: Linjära delrum i $\mathbb{R}^{n+1,1}$

Sfär i m med radie ρ: $S^c \propto \mathcal{C}(m) - \frac{\rho^2}{2} e_\infty = m + \frac{m^2 - \rho^2}{2} e_\infty + e_0$

Radie: $\rho^2 = -\frac{S^2}{(S \wedge e_\infty)^2}$, mittpunkt: $\mathcal{C}(m) \propto S e_\infty S$, ...

Konforma avbildningar i $\mathbb{R}^n$: Linjära isometrier i $\mathbb{R}^{n+1,1}$

Reflektion, rotation: Som i $\mathbb{R}^n$.

Translation: $\mathcal{C}(x+a) = \left(1 + \frac{e_\infty a}{2}\right) \mathcal{C}(x) \left(1 - \frac{e_\infty a}{2}\right)$

Inversion: $\mathcal{C}\left(\frac{x}{x^2}\right) \propto e_+ \mathcal{C}(x) e_+$

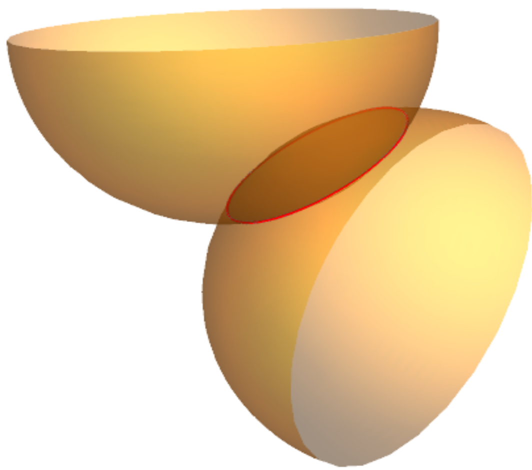
Dilation $\mathcal{C}(\alpha x)$ jobbig formel men den finns.

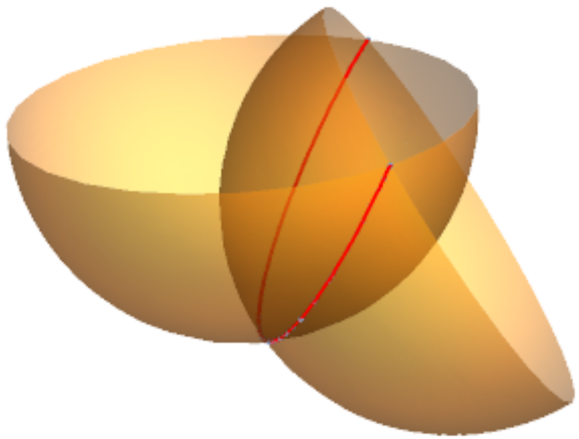
Common curves (kryo-EM)

Mål: Approximera $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ (~ Fouriertransform av 3D-struktur hos molekyl).

Vet: $f|_{H_1}, f|_{H_2}, \ldots, f|_{H_n}$ där H_i är halvsfärer genom origo.

Metod: Två halvsfärer skär varandra i ett cirkelsegment genom origo.
Leta efter gemensamma cirkelsegment mellan två bilder.





Skriv om till ett mer linjärt problem?

Tre idéer: Stereografisk projektion, inversion, skära hyperplan.

Resultat: Alla ekvivalenta, $x \mapsto \frac{x}{x^2}$.