

Örning 9

7.19 a) Antag att $G \subseteq \mathbb{C}$ och att $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ för $n \geq 1$. Antag att (a_n) är en följd i $\mathbb{R}$ med $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ och att, för alla $n \geq 1$, $|f_n| \leq a_n \quad \forall z \in G$. Visa att (f_n) konvergerar likformigt till funktionen 0 på G .

b) Visa påståendet: $f_n: D[0, 1/2] \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) = z^n$ konvergerar likformigt till $f: D[0, 1/2] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 0$.

Lösning a) Låt $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 0$. $f_n \xrightarrow{\text{likf}} f$ om det $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ så att $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, z \in G$.

Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom $a_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ existerar ett $N = N(\varepsilon)$ så att $|a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Men då har vi automatiskt

$$|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z)| \leq a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N, z \in G. \text{ Vi är klara.}$$

b) $|f_n(z)| = |z^n| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall z \in D[0, 1/2]$. Vi har $a_n = 1/2^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Alltså har vi $f_n \rightarrow f$ likformigt på $D[0, 1/2]$.

7.23 Låt $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

a) Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$.

b) Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

Lösning: $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = [-n e^{-nx} x]_0^1 - \int_0^1 -n e^{-nx} dx = -n e^{-n} - [e^{-nx}]_0^1 = -n e^{-n} - e^{-n} + 1 = 1 - (n+1)e^{-n}$
 $\xrightarrow{\text{då } n \rightarrow \infty} 1$

c) Varför motsäger b) inte Prop. 7.27?

För att $f_n \rightarrow 0$ inte är likformig på $(0, 1)$! Ex. $f_n(1/n) = n^2 \cdot \frac{1}{n} e^{-n \cdot \frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty$

7.32 Visa att om $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ existerar då är konvergenstradien av $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ $R = \begin{cases} \infty & \text{om } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| & \text{annan} \end{cases}$

Lösning Om $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lambda$ då har vi för $k > k_0(\varepsilon)$ att $\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \leq \lambda + \varepsilon = \lambda_\varepsilon \Rightarrow |c_{k+1}| \leq \lambda_\varepsilon |c_k| \Rightarrow |c_{k_0+k}| \leq \lambda_\varepsilon^k |c_{k_0}|$

För $r > 0$: $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0} |c_k| r^k}_{\text{begr.}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_\varepsilon^k r^k |c_{k_0}|}_{\text{konv. om } \lambda_\varepsilon r < 1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ är abs. konv. på } D[0, 1/\lambda_\varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ är abs. konv. på } D[0, 1/\lambda] \Rightarrow R \geq 1/\lambda$$

På liknande sätt: Om $\lambda \neq 0$ har vi $\forall k > k_0$ att $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \geq \lambda - \varepsilon > 0 \Rightarrow |c_{k_0+k}| \geq (\lambda - \varepsilon)^k |c_{k_0}|$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k \geq \sum_{k=0}^{k_0-1} |c_k| r^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \varepsilon)^k r^k |c_{k_0}| r^{k_0}}_{\text{konv. om } (\lambda - \varepsilon) \cdot r < 1} \quad \text{Så } \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ har konvergensradie } R \leq \frac{1}{\lambda - \varepsilon} \quad \forall \quad 0 < \varepsilon < \lambda$$

$$\Rightarrow R \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow R = 1/\lambda.$$

8.1 Var konvergerar serien absolut resp. liikeformigt?

a) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sinh(z) \leftarrow$ holomorf på $\mathbb{C} \Rightarrow$ konvergerar abs. på $\mathbb{C}$ och liikeformigt på kompakta mängder.

b) $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z-3} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z-3}} = \frac{z-3}{z-3-1} = \frac{z-3}{z-4} \leftarrow$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{4\} \Rightarrow$ konvergerar absolut på $|z-3| > 1$ och liuf. på kompakta delmängder av $|z-3| > 1$.

8.2 Vilka funktioner representeras av serierna i a) & b)

Se ovan

8.5 Bestäm termer till tredje ord. samt konvergensradien

a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad z_0 = 1$

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \quad f'(1) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad f''(z) = -\frac{2}{(1+z^2)^2} + \frac{8z^2}{(1+z^2)^3} \quad f''(1) = -\frac{2}{2^2} + \frac{8}{2^3} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$f'''(z) = \frac{8z}{(1+z^2)^3} + \frac{16z}{(1+z^2)^3} - \frac{48z^3}{(1+z^2)^4} = \frac{8}{2^3} + \frac{16}{2^3} - \frac{48}{2^4} = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{2 \cdot 2!}(z-1)^2 + 0 \cdot (z-1)^3 + O((z-1)^4)$$

f är holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ avståndet mellan $z_0 = 1$ och $\pm i$ är $\sqrt{2} \Rightarrow$ konvergensradie $\sqrt{2}$.

b) $f(z) = \frac{1}{\exp(z)+1} \quad z_0 = 0 \quad f(0) = \frac{1}{2}, \quad f'(z) = \frac{-e^z}{(e^z+1)^2} \quad f'(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$$f''(z) = -\frac{e^z}{(e^z+1)^2} + \frac{2e^{2z}}{(e^z+1)^3} \quad f''(0) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{8} = 0 \quad f'''(z) = -\frac{e^z}{(e^z+1)^2} + \frac{2e^{2z}}{(e^z+1)^3} + \frac{4e^{2z}}{(e^z+1)^3} - \frac{12e^{3z}}{(e^z+1)^4} \quad f'''(0) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{12}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + 0z^2 - \frac{1}{4 \cdot 3!}z^3 + O(|z|^4)$$

f holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{i\pi n : n \in \mathbb{Z} \text{ udda}\}$ $\text{dist}(0, \{i\pi n : n \in \mathbb{Z} \text{ udda}\}) = \pi \Rightarrow \text{konv. rad} = \pi$.

8.10 Antag att konv. rad av $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ är R . Vad är konv. rad. av...

a) $\sum_{k \geq 0} c_k z^{2k}$ b) $\sum_{k \geq 0} 3^k c_k z^k$ c) $\sum_{k \geq 0} c_k z^{k+5}$ d) $\sum_{k \geq 0} k^2 c_k z^k$?

Lösning Låt $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$. f är holomorf på $D[0, R]$.

a) $\sum_{k \geq 0} c_k z^{2k} = f(z^2) = f_a(z)$. $f_a(z)$ är holomorf på $D[0, \sqrt{R}]$ så konvergensradien är $\sqrt{R}$

b) $\sum_{k \geq 0} 3^k c_k z^k = f(3z) = f_b(z)$. f_b är holomorf på $D[0, R/3]$ —||— $R/3$

c) $\sum_{k \geq 0} c_k z^{k+5} = f(z) \cdot z^5 = f_c(z)$ f_c —||— $D[0, R]$ —||— R

d) $f'(z) = \sum_{k \geq 0} k c_k z^{k-1}$ $f'(z) \cdot z = \sum_{k \geq 0} k c_k z^k$ $\underbrace{(f'(z) \cdot z)'} \cdot z = \sum_{k \geq 0} k^2 c_k z^k$

$f''(z) \cdot z^2 + f'(z)z = f_d(z)$ holomorf på $D[0, R]$ $\Rightarrow$ konvrad = R .