

Örning 8

7.1 Visa att följden konvergerar/divergerar. Om den konvergerar bestäm gränsvärdet.

$$a) a_n = e^{\pi i n/4} \quad \text{om } n = 8k \quad k=1,2,3,4\dots \quad a_{8k} = e^{\pi i \cdot 2k} = 1$$
$$n = 8k+4 \quad \text{--} \quad a_{8k+4} = e^{\pi i (2k+1)} = -1$$

Konvergerar inte (det finns två delföljder med olika gränsvärde)

$$b) a_n = (-1)^n/n \quad \text{Vi har}$$

$$|a_n - 0| = 1/n \quad \text{För alla } \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ så att } |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(välj N så att $1/N < \varepsilon$, dvs $N > 1/\varepsilon$.)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

7.2 Avgör vilka av följande serier som konvergerar/divergerar

$$a) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} \right)^n \quad \text{geometrisk serie med: } \left| \frac{1+i}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \text{ så (absolut) konvergent.}$$

$$b) \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{i} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \overbrace{n}^{a_n} (-1)^n \quad \text{Vi har inte } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ alltså divergent.}$$

7.5 Visa

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ s.a. } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\text{Men } |a_n - a| \geq ||a_n| - |a|| \text{ så } \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ s.a. } ||a_n| - |a|| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

(1)

(2)

$$(1) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \underbrace{|a_n - 0|}_{< \varepsilon} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$(2) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \underbrace{||a_n| - 0|}_{< \varepsilon} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

7.12 Visa att (c_n) konvergerar om $(\operatorname{Im} c_n)$ och $(\operatorname{Re} c_n)$ konvergerar

$$\underbrace{c_n}_{a_n + ib_n} \text{ konvergerar till } \underbrace{c}_{a + ib} \text{ om } \forall \varepsilon > 0 \exists N : |c_n - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\text{Men } |c_n - c| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

$$\text{Så } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Å andra sidan, om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ger Prop 7.3 a) att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + ib_n = a + ib.$$

7.18 a) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ divergerar.

$$0 < \frac{1}{2k} = \frac{k}{2k^2} \leq \frac{k}{k^2+1} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergerar}$$

b) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$ konvergerar

$$0 < \frac{k}{k^3+1} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergerar.}$$

7.25 Hitta en potensserie (och bestäm dess konvergensradie) för :

a) $\frac{1}{1+4z}$.

Kom ihåg att $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ har konvergensradie 1

$$g(z) = \frac{1}{1+4z} = f(-4z) = \sum_{n \geq 0} (-4z)^n \quad \text{konvergenzradien är } \frac{1}{4}$$

$$b) \quad \frac{1}{3 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z/6} = \frac{1}{3} f(z/6) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3} \left(\frac{z}{6}\right)^n \quad \text{konv. rad är } 6.$$

$$f(z) \quad f(z+a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+a-a)^n$$

7.26 Hitta en potensseriepr. runt 0 för

a) $\cos z$: Vi gissar från reell analys att $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ är rätt potensserie.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{R^{2k}}{(2k)!} \text{ konvergerar för alla } R \in [0, \infty) \text{ så konvergenzradien är } \infty.$$

b) $z^2 \sin z$: $z^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

7.28a) Hitta potensserien centrerad i 1 (och bestäm konv. rad.) för

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$f(1-z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{konvergenzradie } 1$$

$$f(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n z^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{konvergenzradie } 1$$

7.29 a) Använd Weierstrass M-test för att visa att $\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^2}$ konvergerar på $\overline{D}[0,1]$

$$\begin{array}{c} \forall z \in \overline{D}[0,1] \\ \left| \frac{z^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_k \frac{z^k}{k^2} \text{ konvergent } \forall z \in \overline{D}[0,1] \\ \quad \quad \quad \uparrow M_k \end{array}$$

7.33 Bestäm konvergensradierna för

a) $\sum_{k \geq 0} a^{k^2} z^k \quad a \in \mathbb{C}$

$R > 0$:

$\sum_{k \geq 0} |a|^{k^2} R^k$ är konvergent för alla R om $|a| < 1$ konv.rad. ∞

är divergent för alla R om $|a| > 1$ $\rightarrow$ 0

är konvergent $\forall R < 1$ om $|a| = 1$ $\rightarrow$ 1

b) $\sum_{k \geq 0} k^n z^k \quad n \in \mathbb{N}$

om $0 < R < 1$ då: $\sum_{k \geq 0} k^n R^k \sim \int_1^\infty x^n R^x dx$ konvergent $\forall n \in \mathbb{N}$
 $e^{x \ln R} \quad \ln R < 0$

om $1 \leq R < \infty$ då är $\ln R > 0$ och integralen divergerar $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Konv.rad = 1 oavsett $n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{k \geq 0} z^{k!} \leq \sum_{k \geq 0} z^k$ konvergerar om $|z| < 1$

$z = 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \Rightarrow$ konvergensradie 1

7.34 a) Hitta en funktion som representeras av $\sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{k!}$

$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \leadsto \exp(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}$
 $\forall z \in \mathbb{C}$