

Örning 6

6.2 Antag att $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är harmoniska på G och $c \in \mathbb{R}$.

Visa att $u(x,y) + cv(x,y)$ också är harmonisk på G .

Lösning Eftersom u & v är harmoniska har de kontinuerliga andra ordningens partialderivator. Därmed har även $u+cv$ det. Dessutom:

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})(u+cv) = \underbrace{(\partial_{xx} + \partial_{yy})u}_{=0 \text{ } u \text{ harm.}} + c \underbrace{(\partial_{xx} + \partial_{yy})v}_{=0 \text{ } v \text{ harm.}} = 0$$

Så $u+cv$ är harmonisk.

6.3 Visa genom ett exempel att produkten av två harmoniska funktioner inte nödvändigtvis är harmonisk.

Lösning $u(x,y) = x$ är harmonisk på $\mathbb{C}$: $u_{xx}(x,y) = 0 = u_{yy}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Men $v(x,y) = u(x,y) \cdot u(x,y) = x^2$ är inte harmonisk på något område eftersom: $v_{xx}(x,y) = 2$, $v_{yy}(x,y) = 0$

6.4 Låt $u(x,y) = e^x \sin y$

a) Visa att u harmonisk på $\mathbb{C}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Alt 1: } u_x = e^x \sin y \quad u_{xx} = e^x \sin y \\ \quad \quad u_y = e^x \cos y \quad u_{yy} = -e^x \sin y \end{array} \right\} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ på } \mathbb{C}$$

Alt 2: Låt $g(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos x + i e^x \sin y$ hol funktion

$\Rightarrow u = \operatorname{Im} g$ harmonisk på $\mathbb{C}$

b) Hitta en hel funktion f sådan att $\operatorname{Re}(f)=u$

Vi säger a) att $u = \operatorname{Im} e^z$. Så $u = \operatorname{Re}(-ie^z)$

6.6 Visa att, om f är holomorf och nollskild på G , då är $\ln|f(x,y)|$ harmonisk på G

Lösning Låt $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ så att

$$h(x,y) := \ln|f(x,y)| = \frac{1}{2} \ln(u^2(x,y) + v^2(x,y))$$

$$h_x(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{u^2 + v^2} (2uu_x + 2vv_x) = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}$$

$$h_{xx}(x,y) = \frac{u_x u_x + u u_{xx} + v_x v_x + v v_{xx}}{u^2 + v^2} - 2 \frac{(uu_x + vv_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

På samma sätt :

$$\begin{aligned} h_{yy}(x,y) &= \frac{u_y u_y + u u_{yy} + v_y v_y + v v_{yy}}{u^2 + v^2} - 2 \frac{(u u_y + v v_y)^2}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{v_x v_x - u u_{xx} + u_x u_x - v v_{xx}}{u^2 + v^2} - 2 \frac{(-u v_x + v u_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

↑
C.R.
och u, v harm.

$$h \text{ harmonisk} \Leftrightarrow h_{xx} + h_{yy} = 0 \Leftrightarrow (u^2 + v^2)^2 (h_{xx} + h_{yy}) = 0$$

↑ > 0 eftersom f nollskild!

$$\begin{aligned} (u^2 + v^2)^2 (h_{xx} + h_{yy}) &= (u^2 + v^2) (u_x u_x + u u_{xx} + v_x v_x + v v_{xx} \\ &\quad + v_x v_x - u u_{xx} + u_x u_x - v v_{xx}) \\ &\quad - 2(u u_x + v v_x)^2 - 2(-u v_x + v u_x)^2 \end{aligned}$$

$$= 2(u^2 + v^2)(u_x^2 + v_x^2) - 2(u^2 u_x^2 + 2u v u_x v_x + v^2 v_x^2 + u^2 v_x^2 - 2u v u_x v_x + v^2 u_x^2)$$

$$= 0.$$

Alternativ För varje $z_0 \in G$ lät $\varepsilon > 0$ vara så litet att

$f(D[z_0, \varepsilon]) \subset D[f(z_0), |f(z_0)|]$. (EH sådant ε existerar eftersom f kont. och $|f(z_0)| \neq 0$)

För varje $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kan vi hitta en holomorf gren av

$$\text{Log}(z) = \log|z| + i \text{Arg}(z) \quad \text{på } D[w, |w|].$$

Kalla den grenen för g_w . Vi har då för alla $z_0 \in G$ att $\exists \varepsilon > 0$ sådan att

$g_{|f(z_0)|} \circ f : D[z_0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf och

$\text{Re } g_{|f(z_0)|} \circ f(z) = \log|f(z)|$. Alltså är $\log|f(z)|$ harmonisk i $D[z_0, \varepsilon]$.

Eftersom harmonicitet är en lokal egenskap är $\log|f(z)|$ harmonisk på

$$\bigcup_{z_0 \in G} D[z_0, \varepsilon(z_0)] = G.$$

6.8 Är det möjligt att hitta en reellvärd funktion $v(x,y)$ så att $x^3 + y^3 + i v(x,y)$ är holomorf?

Lösning: Sätt $u(x,y) = x^3 + y^3$. $u_{xx} = 6x$, $u_{yy} = 6y$ så $u_{xx} + u_{yy} = 6x + 6y$ vilket inte är identiskt 0 på någon icke-tom öppen mängd G . Alltså, är u inte harmonisk på något icke-tomt område. Därmed kan inte $f = u + iv$ vara holomorf på något icke-tomt område oavsett vilket val av v vi gör.