

Örning 4

4.1 Bestäm längden av följande kurvor:

a) $\gamma(t) = 3t + i \quad -1 \leq t \leq 1$ (Vi ser direkt att det är ett linjesegment med längd 6, men vi gör räkningen)

$$\gamma'(t) = 3. \quad \text{length}(\gamma) = \int_{-1}^1 |\gamma'(t)| dt = \int_{-1}^1 3 dt = 6.$$

b) $\gamma(t) = i \cdot e^{i\pi t} \quad 0 \leq t \leq 1.$

$$\gamma'(t) = -\pi e^{i\pi t} \quad \text{length}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 \pi dt = \pi.$$

4.4 Beräkna $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ där γ är enhetscirkeln, param. moturs. Visa att $\int_{C[w,r]} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i \quad \forall w \in \mathbb{C}, r > 0.$

Lösning Parametrisering av γ : $\gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi)$. $\gamma'(t) = ie^{it}$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Param. av $C[w,r]$ (moturs) $\gamma(t) = w + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi)$, $\gamma'(t) = ire^{it}$

$$\int_{C[w,r]} \frac{dz}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - w} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i.$$

4.5 Integrera följande funkt. över $C[0,2]$.

a) $f(z) = z + \bar{z}$. $\gamma(t) = 2 \cdot e^{it} \quad t \in [0, 2\pi)$ $\gamma'(t) = 2ie^{it}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t) + \overline{\gamma(t)}) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (2e^{it} + 2e^{-it}) 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} (4ie^{2it} + 4i) dt = \left[2e^{2it} + 4it \right]_0^{2\pi} = 8\pi i$$

c) $f(z) = \frac{1}{z^4}$ γ som ovan.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\gamma(t))^4} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^4 \cdot e^{i4t}} \cdot 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i}{8} e^{-i3t} dt = \left[\frac{-1}{24} e^{-i3t} \right]_0^{2\pi} = \left[-\frac{1}{24} - -\frac{1}{24} \right] = 0.$$

4.6 Beräkna $\int_{\gamma} x dz$, $\int_{\gamma} y dz$, $\int_{\gamma} z dz$ och $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ när:

a) γ är linjesegmentet från 0 till $1-i$: $\gamma(t) = (1-i) \cdot t \quad t \in [0, 1]$, $\gamma'(t) = 1-i$.

$$\int_{\gamma} x dz = \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 t \cdot (1-i) dt = \left[\frac{t^2}{2} (1-i) \right]_0^1 = \frac{1-i}{2}$$

$$\int_{\gamma} y dz = \int_0^1 \operatorname{Im}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 (-t)(1-i) dt = -\frac{1-i}{2}$$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_{\gamma} x dz + i \int_{\gamma} y dz = \frac{1-i}{2} + i \left(-\frac{1-i}{2}\right) = \frac{1-i}{2} + \frac{-i+1}{2} = -i$$

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \frac{1-i}{2} - i \left(-\frac{1-i}{2}\right) = \frac{1-i}{2} + \frac{i+1}{2} = 1$$

b) $\gamma = C[0,1]$ $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = i e^{it}$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = \left[\frac{i e^{i2t}}{2i} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \left[it \right]_0^{2\pi} = i2\pi$$

$$\int_{\gamma} x dz = \int_{\gamma} \frac{1}{2} (z + \bar{z}) dz = \frac{1}{2} \cdot i \cdot 2\pi = i\pi$$

$$\int_{\gamma} y dz = \int_{\gamma} \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) dz = -\frac{1}{2i} i \cdot 2\pi = -\pi$$

4.27 Fixera $a \in \mathbb{C}$. Beräkna $I(r) := \int_{C[0,r]} \frac{dz}{z-a}$

Lösning Notera att $\frac{1}{z-a}$ är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Om $a \in D[0,r]$ då är $C[0,r] \setminus \{a\}$ -homotop med $C[a,r]$:

$$\gamma_0(t) = re^{it}, \gamma_1(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

Homotopi: $\gamma_s(t) = s \cdot a + re^{it}$ $(s,t) \mapsto \gamma_s(t) \in \mathbb{C}$ kontinuerlig på $[0,1]^2$.

Visa att $\gamma_s(t) \neq a \quad \forall s, t \in [0,1]$. Vi har $|a| < r$ eftersom $a \in D[0,r]$

$$\text{men } |\gamma_s(t) - a| = |re^{it} + (s-1)a| \geq |re^{it}| - |(s-1)a| = r - \underbrace{|s-1|}_{\substack{\uparrow \text{Omvänd} \\ \text{triangelolikhet}}} |a| \geq r - \underbrace{|s-1|}_{\in [0,1]} |a| \geq r - |a| > 0 \Rightarrow \gamma_s(t) \neq a$$

$$\text{Alltså har vi för } r > |a| \quad \int_{C[0,r]} \frac{dz}{z-a} = \int_{C[a,r]} \frac{dz}{z-a} = \left\{ \text{Uppg. 4.4} \right\} = 2\pi i$$

Om $r < |a|$ har vi att $C[0,r]$ är $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ -kontraherbar: $\gamma_s(t) = r \cdot s \cdot e^{it}$ $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ -homotopi mellan 0 och $C[0,r]$.

$$\text{Alltså ger Cor. 4.20 att } \int_{C[0,r]} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

(När $r = |a|$ är integralen odefinierad)

4.28 Antag att $p(z)$ är ett polynom i z och γ är en styckvis slät slutna kurva i $\mathbb{C}$. Visa att $\int_{\gamma} p = 0$.

Lösning Vi vet att p är holomorf på $\mathbb{C}$ (z^n är holomorf $\forall n \in \mathbb{N}$ och linj. komb. av holomorfa funkt. är holomorfa).

Alla slutna kurvor är $\mathbb{C}$ -kontraherbara. Cor. 4.20 ger då att $\int_{\gamma} p = 0$.

4.29 Visa att $\int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^3+1} = 0$ genom att argumentera att integralen inte förändras om vi byter $C[0,2]$ mot $C[0,r]$ $r > 1$. Använd sedan Prop 4.6 d) för att hitta en övre beg. av $|\int_{C[0,r]} \frac{dz}{z^3+1}|$ som går mot 0 då $r \rightarrow \infty$.

Lösning vi har att $z^3+1=0$ i $z=e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{i5\pi/3}$ som alla ligger på $C[0,1]$. Alltså är $f(z)=\frac{1}{z^3+1}$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \overline{D[0,1]}$ (eller ännu bättre: på $\mathbb{C} \setminus \{e^{i\pi/3}, -1, e^{i5\pi/3}\}$)

Vi har $C[0,2] \sim_{\mathbb{C} \setminus \overline{D[0,1]}} C[0,r] \quad \forall \quad r > 1$. Alltså är

$$\int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^3+1} = \int_{C[0,r]} \frac{dz}{z^3+1} \quad \forall \quad r > 1.$$

Vi har $|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{|r^3 e^{i3\theta} + 1|} \underset{\substack{\text{omvänta} \\ \text{triangel olik.} \\ r > 1}}{\leq} \frac{1}{r^3 - 1} \underset{\substack{\text{om vi antar} \\ \text{ex. } r \geq 2}}{\leq} \frac{2}{r^3} \quad \text{length}(C[0,r]) = 2\pi r$

Prop. 4.6 d) $|\int_{C[0,r]} \frac{dz}{z^3+1}| \leq \frac{2}{r^3} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{r^2} \rightarrow 0 \quad \text{då } r \rightarrow \infty.$

Alltså har vi $\int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^3+1} = 0.$

4.37 Beräkna följande:

a) $\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4-z^2} dz$ $f(z) = \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}$ är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{2, -2\}$. $-2 \in D[-1,2]$ men $2 \notin \overline{D[-1,2]}$
 Låt $g(z) = \frac{z^2}{2-z}$, g är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{2\}$

$$\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4-z^2} dz = \int_{C[-1,2]} \frac{g(z)}{z+2} dz = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cauchy's integral formel} \\ -2 \text{ ligger inuti } C[-1,2] \text{ positivt} \\ \text{orienterad enkel sluten} \sim \mathbb{C} \setminus \{2\} \end{array} \right\} = 2\pi i \cdot g(-2) = 2\pi i \frac{(-2)^2}{2-2} = 2\pi i$$

b) $\int_{C[0,1]} \frac{\sin z}{z} dz = \left\{ \begin{array}{l} g(z) = \sin z \text{ hel} \\ C[0,1] \sim \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array} \right\} = 2\pi i \cdot \sin(0) = 0.$

c) $\int_{C[0,2]} \frac{\exp(z)}{z(z-3)} dz = \left\{ \begin{array}{l} g(z) = \exp(z)/(z-3) \text{ holom på } \mathbb{C} \setminus \{3\} \\ C[0,2] \sim \mathbb{C} \setminus \{3\} \end{array} \right\} = 2\pi i g(0) = 2\pi i \frac{\exp(0)}{0-3} = -\frac{2\pi i}{3}$

d) $\int_{C[0,4]} \frac{\exp(z)}{z(z-3)} dz$

Nu ligger både $z=0$ och $z=3$ innanför kurvan. $f(z) = \frac{\exp(z)}{z(z-3)}$ holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{0,3\}$

$C[0,4] \sim \mathbb{C} \setminus \{0,3\} \times$ där γ är konkateneringen av $C[0,2]$ och $C[3,1]$

Alltså,

$$\int_{C[0,4]} \frac{\exp(z)}{z(z-3)} dz = \int_{C[0,2]} \frac{\exp(z)}{z(z-3)} dz + \int_{C[3,1]} \frac{\exp(z)}{z(z-3)} dz = -\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i g(3) = \underline{\underline{-\frac{2\pi i}{3} + \frac{2\pi i e^3}{3}}}$$

↑
från c)

↑
 $g(z) = \frac{\exp(z)}{z}$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

