

Övning 14

9.4 Antag att f är en ickekonst. hel funkt. Visa att alla komplexa tal ligger godtyckligt nära ett tal i $f(\mathbb{C})$.

Lösning $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ $g(z) := f(1/z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^{-k}$.

Två alternativ:

1) g har essentiell sing. i 0 (för alla $k_0 \exists k > k_0$ så att $c_k \neq 0$)

Sats 9.7: alla komplexa tal är godtyckligt nära ett tal i $g(D[0, r] \setminus \{0\})$

$\Rightarrow$ alla komplexa tal är godtyckligt nära ett tal i $g(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = f(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

$\Rightarrow$ alla komplexa tal är godtyckligt nära ett tal i $f(\mathbb{C})$

2) g har inte essentiell sing. i 0 $\Leftrightarrow c_k = 0 \ \forall k \geq k_0$ för något $k_0 \Leftrightarrow f$ är ett (ickekonst.) polynom.

Tag $w \in \mathbb{C}$, $f(z) = w$ har minst en lösning $\Leftrightarrow w \in f(\mathbb{C})$.

Hurwitz' sats

VIII 3.1 $\downarrow$ Låt $\{f_k(z)\}$ vara en följd av analytiska funktioner på G som konvergerar likf. på kompakta till en funktion $f(z)$.

och antag att f har ett nollst. av mult. N i $z_0 \in G$. Visa (m.h.a. Rouché's sats) att för alla tillräckligt små $\rho > 0$

existerar k_0 så att $f_k(z)$ har exakt N nollställen i $D[z_0, \rho]$ för alla $k \geq k_0$.

Lösning f holomorf på G (se nedan). $\exists \rho$ så att $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \overline{D}[z_0, \rho] \setminus \{z_0\}$. Låt $\gamma = C[z_0, \rho]$

Då har vi $Z(f, \gamma) = N$. Vi vill visa att $Z(f_k, \gamma) = N$ för alla stora k .

$Z(f_k, \gamma) \stackrel{?}{=} Z(f, \gamma)$: För att använda Rouché's sats visa att $|f(z)| > |g(z)| \ \forall z \in \gamma$

$\overset{f+g}{f+g} \quad g = f_k - f$

dvs $|f(z)| > |f(z) - f_k(z)|$ för alla $z \in \gamma$ och tillräckligt stora k .

Vi vet att $f(z) \neq 0 \ z \in \gamma$ så $\exists \delta > 0$ så att $|f(z)| > \delta \ \forall z \in \gamma$.

och eftersom $f_k \rightarrow f$ likformigt på γ så $\exists k_0$ så att

$|f_k(z) - f(z)| < \delta \ \forall z \in \gamma, k \geq k_0.$

┌

Visa att om $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ analytiska och $f_n \rightarrow f: G \rightarrow \mathbb{C}$ likf. på kompakta delmängder $K \subset G$ då är f analytisk.

Morenas sats: En kontinuerlig funkt. $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ är analytisk på G om $\int_{\gamma} f dz = 0$ för alla γ styckenvis slöta.

Tag $z_0 \in G$, $\varepsilon > 0$ s.a. $\bar{D}[z_0, \varepsilon] \subset G$. Cauchy's sats $\Rightarrow \int_{\gamma} f_n dz = 0 \quad \forall$ styckenvis slöta $\gamma \subset D[z_0, \varepsilon]$.
 $f_n \rightarrow f$ likf. på $\bar{D}[z_0, \varepsilon] \Rightarrow f$ kont. och $\int_{\gamma} f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = 0$
 $\Rightarrow f$ holomorf på $\bar{D}[z_0, \varepsilon]$.

┐

Visa att om $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa och injektiva samt $f_n \rightarrow f$ likf. på kompakta då är antingen f injektiv eller konstant.

Lösning Antag att f ej konstant. Vi vill visa att f injektiv dvs $f(z_1) \neq f(z_2) \quad \forall \quad z_1 \neq z_2 \in G$.

Fixera $z_0 \in G$ och betrakta $\tilde{f}(z) := f(z) - f(z_0)$. Då har $\tilde{f}$ ett nollställe av någon multiplicitet m i z_0 ($\tilde{f}$ ej konstant)

Förra uppgiften ger att det för alla stora k och enkla slutna kurvor $\gamma \sim_{G, 0}$ att $\mathcal{Z}(\tilde{f}, \gamma) = \mathcal{Z}(\tilde{f}_k, \gamma)$ där

$\tilde{f}_k(z) = f_k(z) - f_k(z_0)$ och $\tilde{f}_k \rightarrow \tilde{f}$. Men $\tilde{f}_k$ har endast ett nollställe: i z_0 av mult. 1. Detta ger att $m=1$ samt att

$\tilde{f}(z) \neq 0 \quad \forall \quad z \neq z_0$. (om det fanns ett annat nollställe ex. i z_1 kan vi välja γ :  så att γ undviker andra nollställena). Alltså är f injektiv.

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \Im z \geq 0\}$$

Antag att $h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ är harmonisk på $\mathbb{H}$ och $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z)$ existerar.

Visa att för $z = x + iy \in \mathbb{H}$ att

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} h(t) dt$$

Ledträd Om $H(z)$ harmonisk på $\mathbb{D}$ och kontinuerlig på $\bar{\mathbb{D}}$ då är $H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{it}) dt$ ^{medelv. egensk.}

Lösning Fixera $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$. Om φ Möbius med $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ & $\varphi(0) = z_0$ då är

$H := h \circ \varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ harmonisk på $\mathbb{D}$ och kont. på $\overline{\mathbb{D}}$, och $h(z_0) = H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{it}) dt$

Konstruera φ : $\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1} = \frac{z-1}{z+1} \frac{(-1+1-2i)}{2} = -i \frac{z-1}{z+1}$ avbildar $1 \mapsto 0$, $i \mapsto 1$, $-1 \mapsto \infty$ så $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ men $0 \mapsto i$

Så $\varphi(z) = x_0 + 2i(z) \cdot y_0$ funkar ($\varphi(0) = x_0 + iy_0$)

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi(e^{it})) dt = \left\{ s = \varphi(e^{it}) \in \mathbb{R}, t = \frac{1}{i} \log \varphi^{-1}(s) \quad dt = \frac{1}{i} \frac{(\varphi^{-1})'(s)}{\varphi^{-1}(s)} ds \right\} = *$$

Invers:

$$w = x_0 + 2i(z)y_0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{w-x_0}{y_0}}_{\tilde{w}} = 2i(z) \Leftrightarrow \tilde{w}(z+i) = -iz+i \Leftrightarrow z(\tilde{w}+i) = i-\tilde{w} \Leftrightarrow z = \frac{i-\tilde{w}}{i+\tilde{w}}$$

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{i-\tilde{w}}{i+\tilde{w}}, \quad (\varphi^{-1})'(w) = \frac{-i-\tilde{w}-i+\tilde{w}}{(i+\tilde{w})^2} \tilde{w}'(w) \underset{\tilde{w}'(w)}{\Rightarrow} \frac{(\varphi^{-1})'}{\varphi^{-1}}(w) = \frac{-2i/(i+\tilde{w})^2}{(i-\tilde{w})/(i+\tilde{w})} \cdot \frac{1}{y_0} = -\frac{2i}{y_0} \frac{1}{(i-\tilde{w})(i+\tilde{w})}$$

$$* = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(s) \left(-\frac{2}{y_0} \frac{1}{(i-\frac{s-x_0}{y_0})(i+\frac{s-x_0}{y_0})} \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(s) \left(-\frac{y_0}{(iy_0-s+x_0)(iy_0+s-x_0)} \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(s) \frac{y_0}{(s-x_0)^2 + y_0^2} ds$$

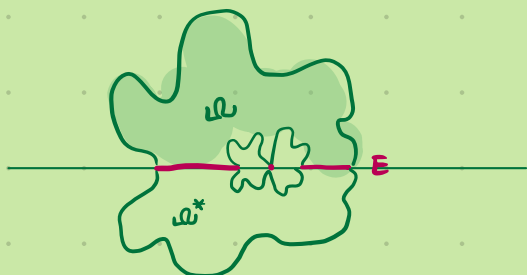
Schwarzreflektion

Antag att Ω är ett område i $\mathbb{H} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$ och låt $E = \overline{\Omega} \cap \mathbb{R}$. Antag att $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ kontinuerlig, $f|_{\Omega}$ holomorf.

och att $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E$. Låt $\Omega^* = \{ z: \bar{z} \in \Omega \}$ och låt $\hat{\Omega} = (\overline{\Omega \cup \Omega^*})^\circ = \{ \text{inre punkter till } \overline{\Omega \cup \Omega^*} \}$.

Hitta en kontinuerlig funktion $\hat{f}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ sådan att $\hat{f}|_{\overline{\Omega}} = f$ och $\hat{f}$ holomorf på $\hat{\Omega}$.

Skiss



Ledning Vi vet värdet av f i $z \in \Omega$. vad är ett lämpligt

värde av f i $\bar{z} \in \Omega^*$?