

Övning 10

8.17 Hitta en Laurentserie för $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ centrerad i $z=1$. Var konvergerar den?

Lösning

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1/2}{\frac{z-1}{2}+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k \quad \text{konvergerar för } |z-1| < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (z-1)^{k-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} (z-1)^{k-1} = -\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+2}} (z-1)^k$$

Konvergent på $0 < |z-1| < 2$

Alt. $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^k$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k (z-1)^{-k-2}$$

↑
konv. för $|z-1| > 2$

8.18 Som 8.17 men med $\frac{1}{z(z-2)^2}$ $z=2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1/2}{\frac{z-2}{2}+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^k \quad \text{konv på } |z-2| < 2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1-\frac{2}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-2}\right)^k \quad \text{konv på } |z-2| > 2$$

Så $\frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (z-2)^{k-2} \quad \text{konv på } 0 < |z-2| < 2$

$$\frac{1}{z(z-2)^2} = \sum_{k \geq 0} z^k (z-2)^{-k-3} \quad \text{konv på } |z-2| > 2.$$

8.23 Visa att $\frac{z-1}{z-2} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k$ för $|z-1| > 1$.

Lösning $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k$ om $|z-1| > 1$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z-2} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k$$

8.27 Antag att f holomorf i z_0 , $f(z_0) = 0$ och $f'(z_0) \neq 0$.

Visa att f har ett nollställe med multiplicitet 1 i z_0 .

Lösning Vi vill visa att $\exists$ funktion g holomorf i z_0 med $g(z_0) \neq 0$ sådan att $f(z) = (z-z_0)g(z)$ (i en omgivning av z_0).

$$\exists \varepsilon > 0 \quad (c_k), c_k \in \mathbb{C}, \text{ så att } f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z-z_0)^k \quad \forall |z-z_0| < \varepsilon,$$

$$\text{Vi vet att } c_0 = f(z_0) = 0 \text{ och } c_1 = f'(z_0) \neq 0.$$

$$\text{Sätt } g(z) := \sum_{k \geq 1} c_k (z-z_0)^{k-1}. \text{ Då är } g(z) \text{ holomorf för } |z-z_0| < \varepsilon$$

med $g(z_0) = c_1 \neq 0$ och

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} c_k (z-z_0)^k = (z-z_0) \sum_{k \geq 1} c_k (z-z_0)^{k-1}.$$

8.28 a) Bestäm multipliciteten av nollstället $z_0 = 2k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$ av $f(z) = \exp(z) - 1$

Lösning $f(2k\pi i) = \exp(2k\pi i) - 1 = 0$

$$f'(2k\pi i) = \exp(2k\pi i) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{multiplicitet } 1$$

$$(\text{Potensserien ser ut som } \exp(z) - 1 = 0 + 1(z - 2k\pi i) + O(|z - 2k\pi i|^2))$$

8.31 Visa att $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \right) = 0$ och $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{6}$

Lösning

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overbrace{z - \sin z}^0}{\underbrace{z \sin z}_0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 - \cos z}^0}{\underbrace{\sin z + z \cos z}_0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\cos z + \cos z - z \sin z} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^2 \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{2z \sin z + z^2 \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2 \sin z + 2z \cos z + 2z \cos z - z^2 \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2 \cos z + 4 \cos z - 4z \sin z - 2z \sin z - z^2 \cos z} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

8.6 Låt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Visa att, trots att, f är oändligt deriverbar på hela $\mathbb{R}$ så konvergerar dess Taylorserie (centrerad i $x=0$) inte på hela $\mathbb{R}$.

Lösning $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k \geq 0} (-x^2)^k$ konv. omm. $|x| < 1$

8.11 Antag att G är ett område och $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf. Visa att

$$X = \{a \in G : \exists r \text{ s.a. } f(z) = 0 \ \forall z \in D[a, r]\}$$

$$Y = \{a \in G : \exists r \text{ s.a. } f(z) \neq 0 \ \forall z \in D[a, r] \setminus \{a\}\}$$

är öppna

Lösning X är öppen: Låt $a \in X$ då $\exists r$ så att $f(z) = 0 \ \forall z \in D[a, r]$

tag $b \in D[a, r]$ godt. $\exists \varepsilon > 0$ så att $D[b, \varepsilon] \subset D[a, r]$ (tag ex $\varepsilon = r - |b - a|$)

alltså har vi att $f(z) = 0 \ \forall z \in D[b, \varepsilon]$ så $b \in X$. Detta visar att $D[a, r] \subset X$ så a är en inre punkt till X . Eftersom a var godt. visar det att X öppen (alla dess punkter är inre punkter)

Y är öppen: Modifiera argumentet genom att välja ε så att $D[b, \varepsilon] \subset D[a, r] \setminus \{a\}$

(tag ex $\varepsilon = \min(r - |b - a|, |b - a|) = \text{dist}(b, \partial(D[a, r] \setminus \{a\}))$.)

8.35 Antag att f är holomorf och inte identiskt 0 på en öppen skiva D centrerad i a men att $f(a) = 0$. Visa att $\text{Re} f(z) > 0$ för något $z \in D$.

a) Vi kan skriva $f(z) = (z - a)^m g(z)$ $m > 0$ (heltal), g holomorf och $g(a) \neq 0$: Detta följer från Sats 8.14.

b) Eftersom $g(a) \neq 0 \exists c, \alpha \in \mathbb{R}, c > 0$, så att $g(a) = c \cdot e^{i\alpha}$. Definiera $G(z) = e^{-i\alpha} g(z)$ så att

$$G(a) = e^{-i\alpha} g(a) = e^{-i\alpha} c e^{i\alpha} = c \quad \text{så} \quad G(a) = \text{Re } G(a) > 0.$$

c) Eftersom $\text{Re } G$ är kontinuerlig (g holomorf $\Rightarrow G$ holomorf $\Rightarrow \text{Re } G$ kont.) och $\text{Re } G(a) > 0$

har vi att $\exists \delta > 0$ så att $\text{Re } G(z) > 0$ för alla $z \in D[a, \delta]$.

d) Låt $z = a + re^{i\theta}$. Vi har $f(z) = (z - a)^m g(z) = (z - a)^m e^{-i\alpha} G(z) = (a + re^{i\theta} - a)^m e^{-i\alpha} \cdot G(a + re^{i\theta})$
 $= r^m e^{i(m\theta - \alpha)} G(a + re^{i\theta})$

e) Om vi väljer $r \in (0, \delta)$ och θ så att $m \cdot \theta - \alpha = 0$ (dvs. $\theta = \alpha/m$) då får vi att

$$f(z) = r^m e^{i0} G(a + re^{i\theta}) = r^m G(a + re^{i\theta}) \Rightarrow \text{Re } f(z) = r^m \text{Re } G(a + re^{i\theta}) > 0. \quad \text{Vi är klara!}$$