Daniel Ljunggren Sep. 2010

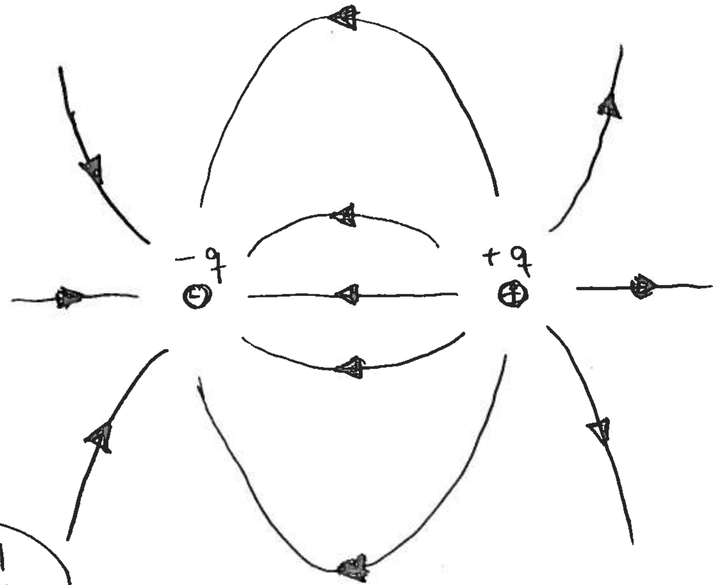
Övning 3 SK1111

Repetition.

I. ELSTATIK (kap. 21 - 24)

Elektriska kraftfält!

Laddningar utbyter virtuella fotoner som medlare av energi mellan laddad materia.



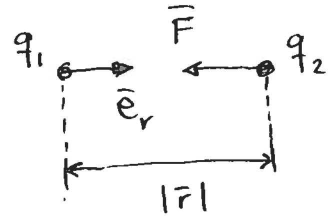
ex. dipolen

Statik = tidsoberoende fält!
(stilla eller långsamma laddningar)

Kraftverkan

Coulomb's lag

$$\boxed{\bar{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \bar{r}^2}\, \bar{e}_r}$$



exp. erfarenhet upptäckt $\sim \frac{1}{r^2}$

Alla naturliga kraftfält

1) Gravitation (svag, mellan massa, graviton $\sim \frac{1}{r^2}$)
2) Starka kraften (stark, proton $\leftrightarrow$ neutron, gluon $\sim r$)
3) Svaga kraften (svag, håller samman proton, foton)
4) Elektromagnetiska, (svag, gas, molekyler, foton $\sim \frac{1}{r^2}$)

FÄLT är utbyte av ENERGI!

Elektromagnetiska modellen.

i) laddning :

- kvantisering , $q = ne^-$
- konservering , $q_{univ} = konst.$
- laddningstäthet, $\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}$

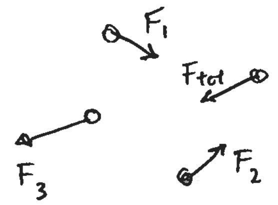
1 Coulomb på 1 meter ~ 1 miljon ton

ii) kraftverkan :

- coulombs lag
- Superpositionsprincipen

$$F_{tot} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

$\Rightarrow$ Angrip delproblem !



iii) Elektrisk fältstyrka

$$\boxed{\bar{E} = \lim_{q_t \to 0} \frac{\bar{F}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r}$$

☆ E-fältet är ett exempel på ett vektorfält (riktning och storlek i rummet)

☆ Temperatur i ett rum är ett exempel på skalärfält (endast storlek i rummet)

Naturkonstant !

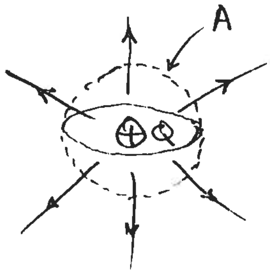
ε_0 : permittivitet i vakuum $= 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$
(elektromagn. fältets ledningsförmåga)

Elstatisk lag I

Gauss lag

flöde: $$\Phi = \oiint_A \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ Maxwell's ekv. 1

typex 1.

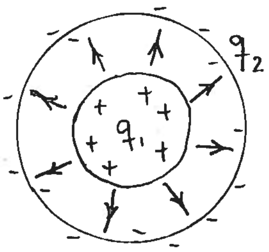


$Q \rightarrow E$

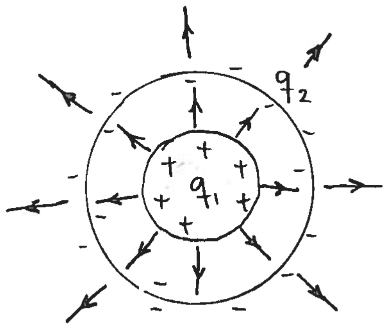
$$\oiint_A \bar{E} \cdot d\bar{A} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{e}_r \quad !$$

typex 2.



$|q_1| = |q_2|$

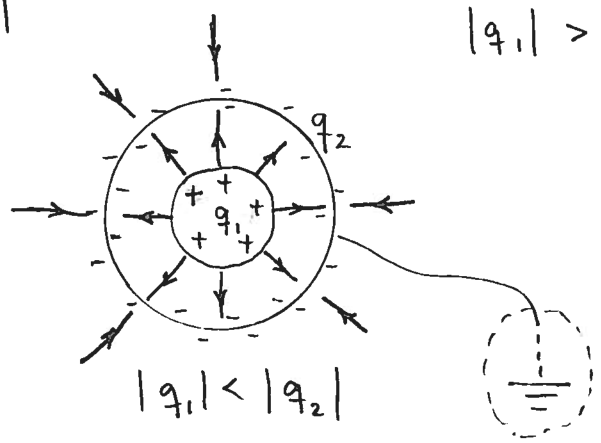


$|q_1| > |q_2|$

Yttre fält

$\boxed{q_{tot} = q_1 + q_2}$

på långa avstånd kan q_{tot} approximeras med $\Sigma\, q_n$



$|q_1| < |q_2|$

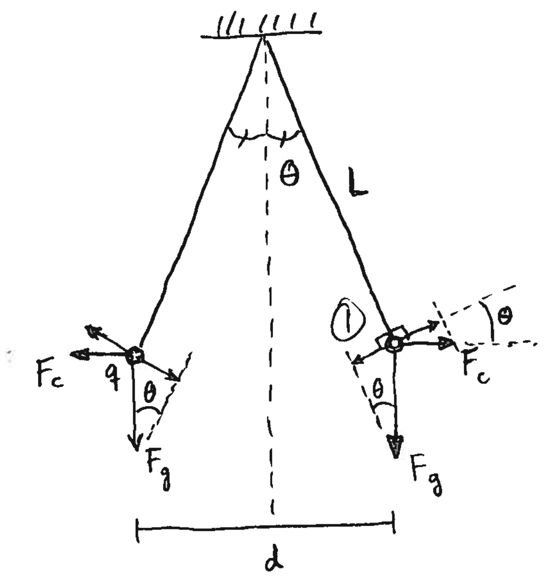
? Om vi jordar q_2 ?

IDAG Statiska elektriska fält. (ingen eller långsam acceleration eller rörelse av laddningar)

Senare : • laddningar i rörelse → magnetfält B

• tidsvarierande fält (dynamiska) → E och B-fält (Maxwells ekvationer)

21.74) Pendelladdningar (Coulombs lag)



Sökt : d ?

Känt : Statiskt läge, laddade partiklar + tyngdkraft

- Coulombs lag : $F_c = q \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$, $F_g = mg$
- Newtons 2:a lag : $F = ma = 0$

Kraftekv. : (för partikel 1)

$\curvearrowright$: $F_c \cos\theta - F_g \sin\theta = 0$

$$q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \cos\theta = mg \sin\theta$$

[Approximation, Taylorutveckling, små θ

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots \approx \theta$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \ldots \approx 1$$]

$$\Rightarrow \boxed{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = mg\theta} \qquad (1)$$

forts.

Vi har : $\frac{d}{2} = L \sin\theta \approx L\theta \Rightarrow \theta = \frac{d}{2L}$ (2)

(2) i (1) ger

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = mg\frac{d}{2L}$$

$$\Rightarrow \quad d = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3} \qquad \text{v.s.v.}$$

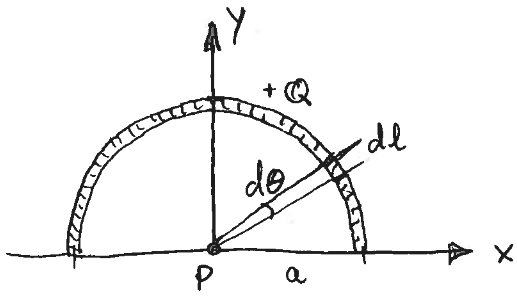
ex: $L = 120$ cm , $m = 10$ g , $d = 5$ cm

$$\Rightarrow \quad q = \left(\frac{d^3 \cdot 2\pi\varepsilon_0 mg}{L}\right)^{1/2} =$$

$$= 2.4 \cdot 10^{8}\ C$$

motsv. $\frac{q}{e^-} = 2 \cdot 10^{11}$ elektroner !

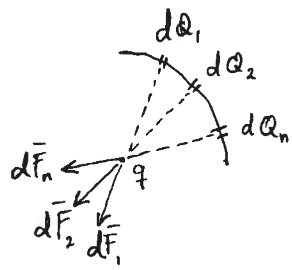
21.96) Laddningstäthet (Superposition)



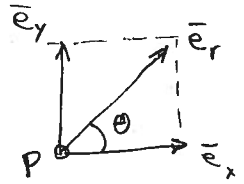
Sökt : Elektriskt fält i pkt P ?

känt : Uniformt laddad halvcirkel.

Idé : Integration (summering) av delladdningar enligt superpositionsprincipen !



- Coulombs lag : $d\bar{F} = q \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \bar{e}_r$
- Elektrisk fältstyrka : $\bar{E} = \lim\limits_{q \to 0} \dfrac{\bar{F}}{q}$



$$\Rightarrow \quad d\bar{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \bar{e}_r$$

$$\bar{E} = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} dQ\, \bar{e}_r = \left\{ \begin{array}{l} dQ = \rho \cdot dl = \rho \cdot a\, d\theta \\ \bar{e}_r = \cos\theta\, \bar{e}_x + \sin\theta\, \bar{e}_y \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \rho \cdot a \cdot d\theta \cos\theta\, \bar{e}_x + \int_{\theta=0}^{\pi} \rho\, a\, d\theta \sin\theta\, \bar{e}_y \right]$$

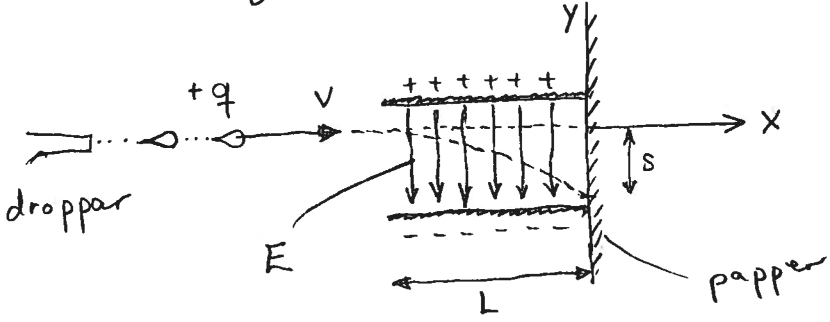
$$= -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(\underbrace{\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ symmetri !}} \bar{e}_x + \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \bar{e}_y \right) =$$

$$= -\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(-\cos(\pi) + \cos 0 \right) \bar{e}_y = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 a} \bar{e}_y$$

$$= \left\{ \rho = \frac{Q}{\pi a} \right\} = \boxed{-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2} \bar{e}_y = \bar{E}}$$

7

.21.86) Laddning i fält (Bläckstråleskrivare)



<u>Sökt</u>: q? , <u>känt</u>: $s = 0{,}30$ mm , $L = 2$ cm

$E = 8 \cdot 10^4$ N/C , $v = 20$ m/s

$m = 1{,}4 \cdot 10^{-11}$ kg

Bortse från gravitationen!

- Newtons 2:a lag: $F_y = m a_y = m\ddot{y}$
- Def. elektriskt fält $\boxed{\bar{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\bar{F}}{q}}$

ger $F_y = qE_y = -qE$

<u>Kraftekvation</u> $\uparrow$: $-qE = m\ddot{y}$

$\Rightarrow q = -\frac{m\ddot{y}}{E}$ (1)

$\ddot{y}$?

Konst. acceleration:

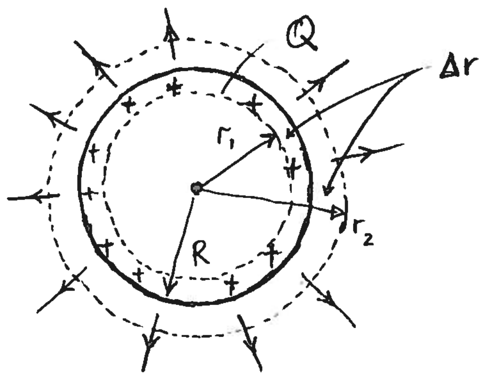
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}_0 + \ddot{y}t \Rightarrow y(t) = \int_0^t (\dot{y}_0 + \ddot{y}t')dt' = \dot{y}_0 t + \frac{\ddot{y}t^2}{2}$$

Villkor 1: $y(T) = -s$ & $\dot{y}_0 = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2s}{T^2}$ (2)

Villkor 2 (tid till stop): $x(T) = v \cdot T = L \Rightarrow T = \frac{L}{v}$ (3)

* (3) i (2) i (1) $\Rightarrow q = \frac{2msv^2}{EL^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-13}$ C

22.16) Elektriskt fält från ledande sfär

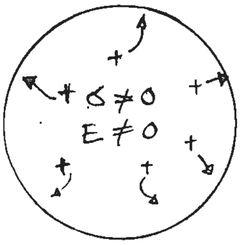


Sökt: $E(r_1)$ och $E(r_2)$?

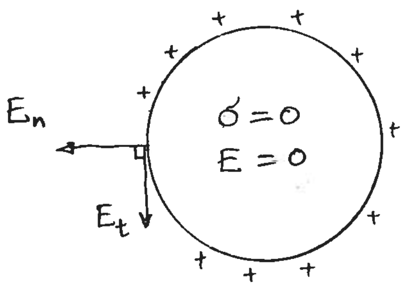
Känt: Laddning $Q = 0{,}25\ nC$, $\Delta r = 0{,}1\ m$, $R = 0{,}45\ m$

Varför lägger sig laddningar på ytan av en sfär ?

Kraftkomposanter !



$t = 0$



$t > 0$

$E_t = 0$

$E_n = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Faraday's bur !

Gauss lag: $\displaystyle\oint\!\!\oint_A \bar{E}\cdot d\bar{A} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

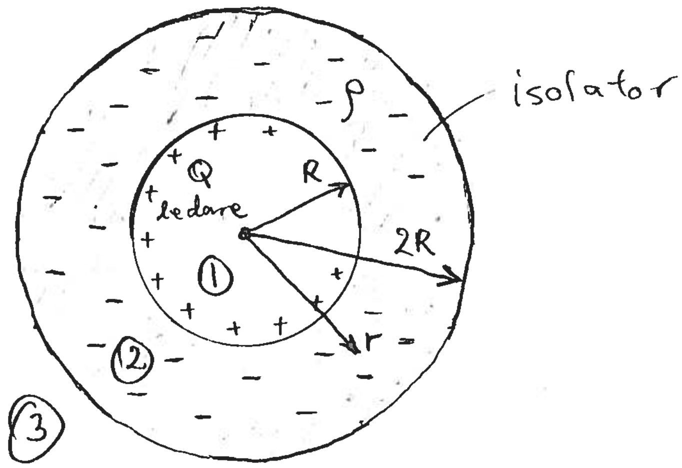
$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{e}_r} \quad ! \qquad \left(\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2\right)$$

a) $$\bar{E}(r_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R+\Delta r)^2}\,\bar{e}_r = 7{,}4\ N/C$$

b) $$\bar{E}(r_1) = \frac{0}{4\pi\varepsilon_0 (R-\Delta r)^2}\,\bar{e}_r = 0$$

Ingen innesluten laddning !

22.48) Laddad sfär med neutraliserande skal. (9)



<u>Sökt</u>: a) ρ så att $\sum q_n = 0$?

b) Fältet $E(0 < r < \infty)$?

c) Varför diskontinuitet hos E ?

a) $\sum q_n = Q + \rho \cdot V$ där V isolatorns volym

$$V(r) = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R^3) \quad (1) \longrightarrow V(2R) = \frac{4\pi 7R^3}{3}$$

$$\sum q = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{Q}{V} = -\frac{3Q}{28\pi R^3} \quad (2)$$

Gauss lag: $\oiint \bar{E} \cdot d\bar{A} = 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{e}_r} \quad !$$

b)

1: $0 < r < R$: $q = 0 \Rightarrow \bar{E} = 0$

2: $R < r < 2R$:

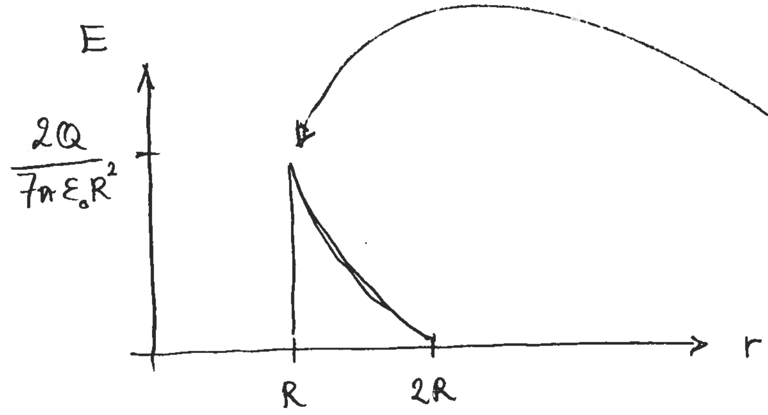
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho \cdot V(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \{(1) \text{ och } (2)\}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{3Q \cdot 4\pi}{4\pi\varepsilon_0 r^2\, 28\pi R^3 \cdot 3}(r^3 - R^3) = \frac{2Q}{7\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{28\pi\varepsilon_0 R^3}$$

(3): $2R < r < \infty$: $q = Q + \rho V = Q - Q = 0$ (10)

Ingen innesluten laddning!

$\Rightarrow \bar{E} = 0$



c) Laddningar i ledande sfär lägger sig på ytan R.

→ diskontinuitet både för

- laddningstäthet
- E-fält.