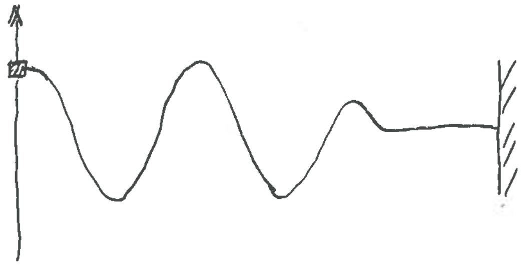
Övning 1 SK1111

Daniel Ljunggren Aug 2010 v2 ①

Mekaniska vågor

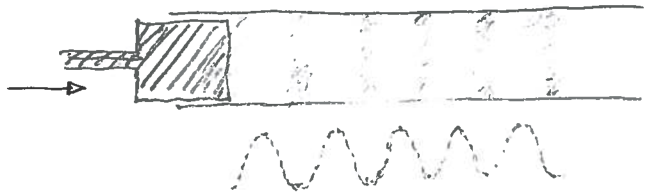
Repetition.

- Transversella
  ex. elektromagnetiska
  spänd sträng.



Idag!

- Longitudinella
  ex. ljud



Nästa övning.

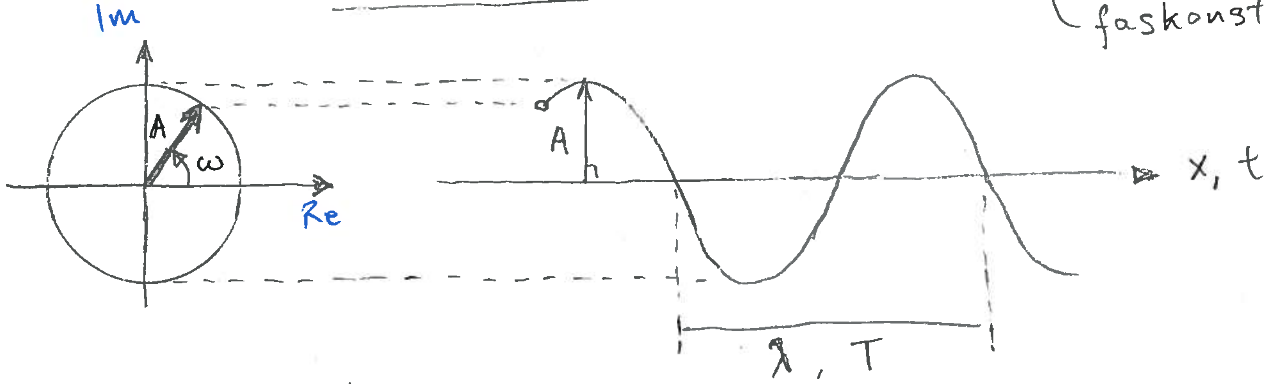
Vattenvågor ?

Vågfunktioner

OBS! cos i boken YF.

$$\boxed{y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)}$$

↑ faskonstant



$$\left\{\begin{array}{ll} A: & \text{amplituden} \\ k: & \text{vågtalet} \qquad k = 2\pi/\lambda \qquad (\lambda \text{ våglängd, meter}) \\ \omega: & \text{vinkelfrekvens} \qquad \omega = 2\pi f \qquad (f \text{ frekvens, Hz}) \end{array}\right.$$

Period $T = \frac{1}{f}$ (sekund)

Våghastighet

$$\boxed{v = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k}}$$

Dragspänning F

$$\boxed{\Rightarrow \quad v = \sqrt{F/\mu}}$$

μ : massdensitet per längdenhet

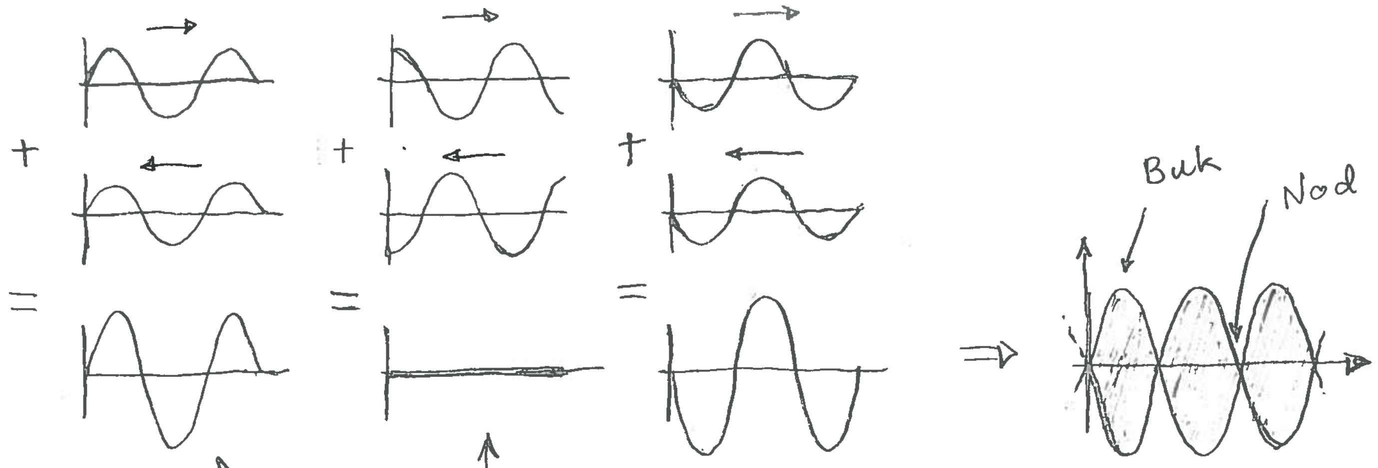
Vågfunktionen kan även skrivas imaginärt.

$$y(x,t) = A\cos(kx-\omega t) = \mathrm{Re}\{Ae^{i(kx-\omega t)}\}$$

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t) = \mathrm{Im}\{Ae^{i(kx-\omega t)}\}$$

(Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

Superposition



Interferens

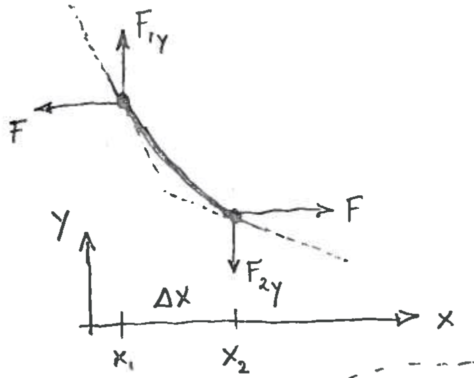
Konstruktiv

Destruktiv

Stående våg

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)}$$

Vågekvationen



$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1} - F\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_2}$$

Newtons 2:a lag: $F_y = ma = \mu\Delta x \dfrac{d^2y}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_2}}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{d^2y}{dt^2}$$

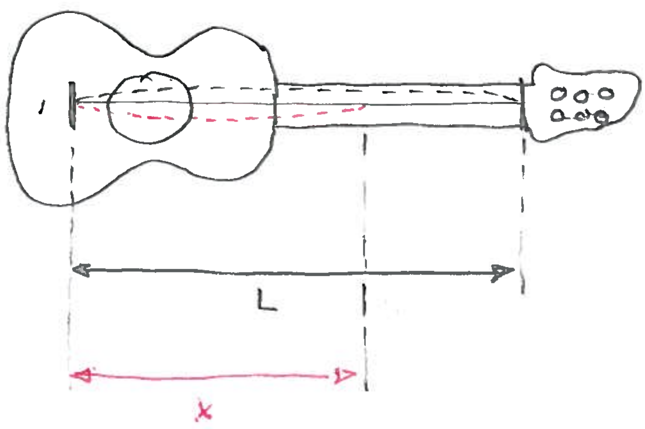
$\lim \Delta x \to 0$ ger $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}}$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Senare: Elektromagnetiska vågor

$$= \sqrt{\frac{1/\varepsilon_0}{\mu_0}} = c$$

15.45) Våghastighet – frekvens (toner)



Känt : $L = 60.0$ cm , $m = 2.00$ g $\Rightarrow$ $f_A = 440$ Hz (A-ton)

Sökt : a) x som ger $f_D = 587$ Hz (D-ton) ?

b) $f_G = 392$ Hz möjligt ?

Grundton $\Rightarrow$ $\lambda = 2 \cdot L$

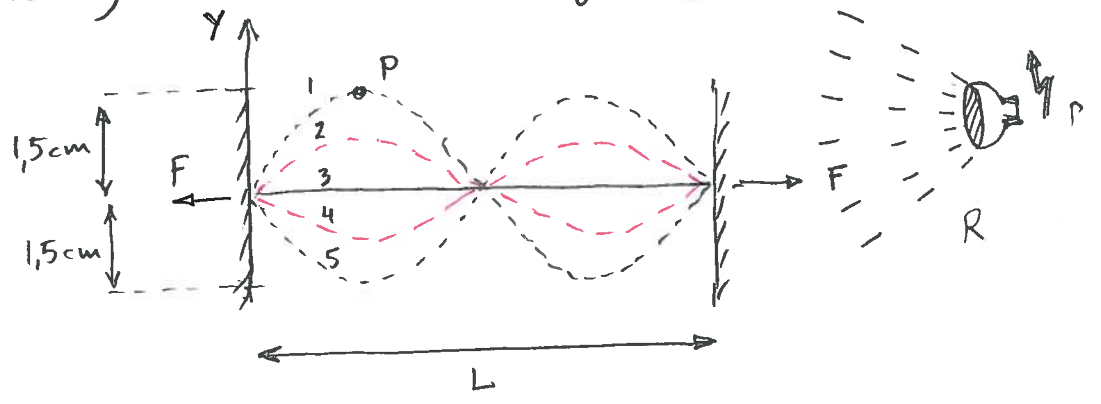
Våghastighet $v = f \cdot \lambda = f_A \cdot 2L$ är konstant !

a) d.v.s $x = \dfrac{\lambda}{2} \overset{\downarrow}{=} \dfrac{v}{2 f_D} = \dfrac{f_A \cdot 2L}{2 f_D} = \underline{\underline{45.0 \text{ cm}}}$

b) $x = \dfrac{f_A \cdot 2L}{2 f_G} = 67.3$ cm $> L$ Omöjlig grundton !

(4)

15.68) Transversell våg - partikel rörelse



Känt: $L = 50.0\ cm$, $F = 1.00\ N$, $R = 5000\ min^{-1}$

Sökt: a) Period T, frekvens f, våglängd λ ?

b) Vilken överton ?

c) Våghastighet v ?

d) Hastighet för pkt P vid 1 och 3.

e) Strängens massa m ?

a) Stroboskop frekvens $f_s = \frac{R}{60}$ $[s^{-1}]$

– " – period $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{60}{R}$

Vi har 8 blixtar per svängningsperiod:

$\Rightarrow$ $T = 8T_s = \frac{60 \cdot 8}{R} = \underline{\underline{96.0\ ms}}$

och $f = \frac{1}{T} = \underline{\underline{10.4\ Hz}}$

$\lambda = L = \underline{\underline{50\ cm}}$

b) Första övertonen

c) $v = f \cdot \lambda = 521\ cm/s = \underline{\underline{5.21\ m/s}}$

d) Svängningsrörelse : $y(t) = A\sin(\omega t)$

där amplituden $A = 1{,}5$ cm

vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Derivera $\rightarrow$ $v(t) = \dot{y}(t) = A\cos(\omega t)\cdot\omega$

Finn tidpunkter !

Blixt 1 : $y(t_1) = A \Rightarrow \sin(\omega t_1) = 1 \qquad t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{2}n$

3 ; $y(t_3) = 0 \Rightarrow \sin(\omega t_3) = 0 \qquad t_3 = 0 + \frac{T}{2}n$

$$v(t_1) = A\cos\left(\omega \frac{T}{4}\right)\cdot\omega = A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\omega = \underline{\underline{0}} \text{ cm/s}$$

$$v(t_3) = A\cos(\omega\cdot 0)\cdot\omega = -A\omega = -A2\pi/T$$

$$= \underline{-98.0 \text{ cm/s}}$$

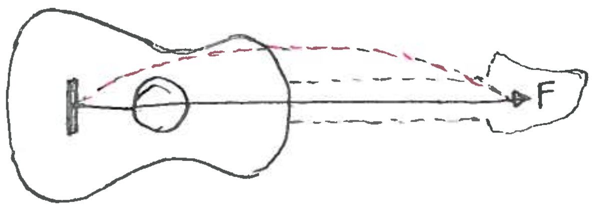
e) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

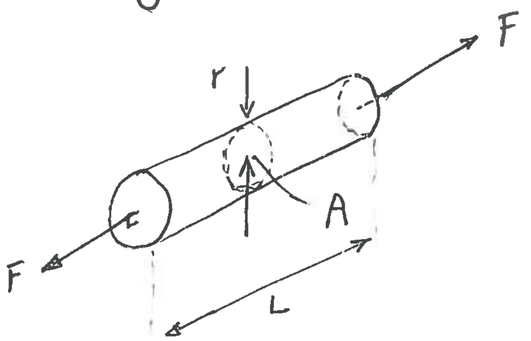
där μ = massa per längdenhet, kg/m

$$\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{1}{5{,}2^2} = 0{,}037 \text{ kg/m}$$

$$m = \mu\cdot L = \underline{0{,}0185 \text{ kg}}$$

15.76) Dragspänning – hållfasthet sträng





Känt: Strängens densitet $\rho = 7800\ kg/m^3$

Dragbrottgräns (tensile stress) $\sigma_{max} = 7{,}0 \times 10^8\ N/m^2$

Strängens massa, $m = 4.0\ g$

Dragkraft, $F_{max} = 900\ N$

Sökt: a) Max längd L_{max} ?

Min radie r_{min} ?

b) Högsta möjliga grundfrekvens ?

a) Vi har sambandet: $\sigma = \dfrac{F}{A}$ där $A = \pi r^2$

Gränsfall $A_{min} = \dfrac{F}{\sigma_{max}} = \pi r_{min}^2$

$\Rightarrow \quad r_{min} = \sqrt{\dfrac{F}{\pi \sigma_{max}}} = \underline{\underline{0{,}64\ mm}}$

Vi har $m = L \cdot A \cdot \rho$ = konstant

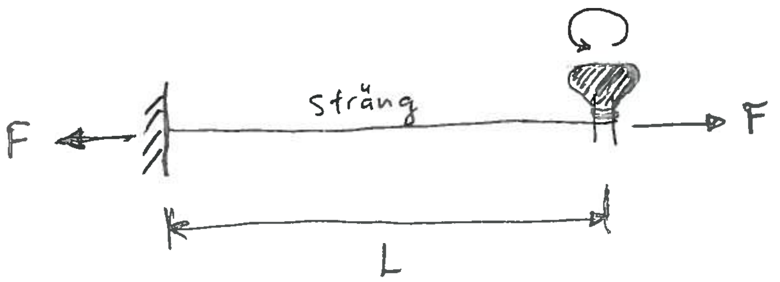
$\Rightarrow \quad L_{max} = \dfrac{m}{A_{min}\rho} = \dfrac{m\sigma_{max}}{F\rho} = \underline{\underline{40\ cm}}$

b) Vi har $f_{max} = \dfrac{v_{max}}{\lambda}$ där $\lambda = 2L$ för grundfrekv.

Använd $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ där längddensitet $\mu = \dfrac{m}{L} = \rho A$

$\Rightarrow \quad f_{max} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{FL}{m}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{F}{Lm}} = \underline{\underline{375\ Hz}}$

15.79) Dragspänning – frekvens



Känt: $L = 60{,}0$ cm, $f_C = 65.4$ Hz, $m = 14.4$ g

a) Dragkraft F ?

b) $f_C \rightarrow f_D = 73.4$ Hz $\Rightarrow \dfrac{F_D}{F_C}$?

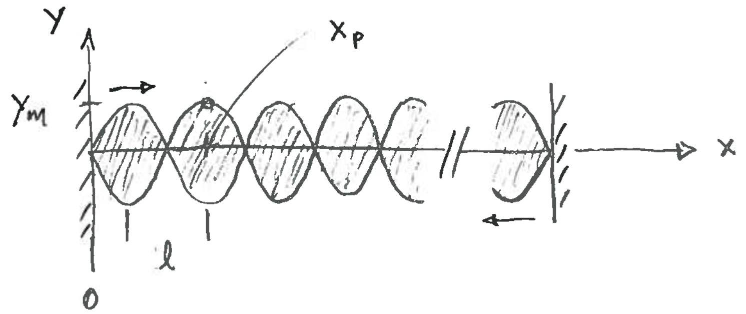
a) Vi använder $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, där μ = längddensitet $= \dfrac{m}{L}$

mha. $v = f\lambda$ härleder vi för grundtonen:

$$F = \mu f^2 \lambda^2 = \frac{m}{L} f^2 (2L)^2 = 4 m f^2 L = \underline{\underline{148 \text{ N}}}$$

b) $$\frac{F_D}{F_C} = \frac{4 m f_D^2 L}{4 m f_C^2 L} = \frac{f_D^2}{f_C^2} = 1.26 \quad (26\,\%)$$

15.34) Stående våg



Bra formel:
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

Känt: $l = 15.0$ cm

$y_m = 0,850$ cm
$T = 0,0750$ s } vid buk (antinode)

Sökt: a) Avstånd mellan noder ?

b) Våglängd, amplitud, våghastighet ?

c) Min och max partikelhastighet vid buk ?

d) Avstånd mellan nod och buk ?

a) Periodisk funktion $\Rightarrow l_{nod} = l_{buk} = 15.0$ cm

b) Vi vet att $y(x,t) = y_m \sin(kx)\sin(\omega t)$ (1)

$= y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t)$

Identifikation!

$\lambda = 2l = 30.0$ cm $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi/l$

$A = y_m/2 = 0.425$ cm

$v = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda = \lambda/T = 4.00$ m/s

c) Derivera (1): $v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = y_m \sin(kx)\,\omega\cos(\omega t)$

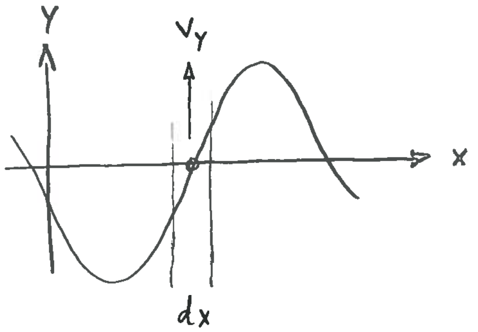
Vid buk: $v_y(x = \frac{l}{2} + ln, t) = y_m \omega \cos(\omega t)$

$|v_y|_{max} = y_m \omega = y_m \cdot 2\pi f = y_m \frac{2\pi}{T} = 71.2$ m/s

$|v_y|_{min} = 0$

d) $l/2 = 7,50$ cm

15.81) Energitransport i transversell våg



a) Visa att den kinetiska (rörelse) energin i någon pkt är

$$u_k = \frac{d}{dx} K(x,t) = \frac{1}{2}\mu v_y^2 \qquad \left[= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dy(x,t)}{dt}\right)^2 \right] \qquad (1)$$

Vi har $dK = \frac{1}{2} dm \cdot v_y^2$ (2)

För längdelement dx gäller

$dm = \mu dx$ (3) där μ är längddensitet

Insatt (3) i (2) ger

$$dK(x,t) = \frac{1}{2}\mu dx \cdot v_y^2$$

vilket ger (1) # QED.

b) Sök $u_k(x,t)$ för $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$.

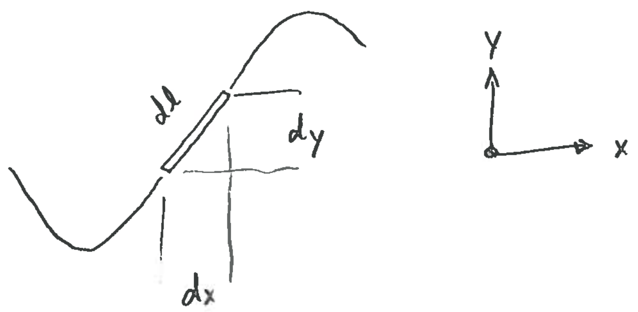
Vi har $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin(kx - \omega t)$

$$\dot{y}^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = A^2\omega^2 \sin^2(kx - \omega t) \qquad (4)$$

Insatt (4) i (1) ger

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

c) Potentiell (elastisk) energi.



Visa att $dl = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy(x,t)}{dx}\right)^2\right)$.

Pythagoras sats

$$\Rightarrow \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$dl = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \quad (5)$$

för små svängningar!

d) Visa att den potentiella energin i någon pkt är

$$u_p = \frac{d}{dx}U(x,t) = \frac{1}{2}F\left(\frac{dy(x,t)}{dx}\right)^2 \quad (6)$$

Vi har $dU = F\cdot(dl - dx)$ (7)

Insatt (5) i (7) ger

$$dU = F\left(dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) - dx\right)$$

vilket ger (6) # QED.

f) Visa att $u_k = u_p$.

Krav: $\mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = F\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\frac{dy}{dx} = v\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{dx}}{dt}\cdot\frac{dy}{\cancel{dx}}$$

QED.

e) Sök $u_p(x,t)$ för $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

Vi har $\frac{dy}{dx} = -Ak\sin(kx-\omega t)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = A^2k^2\sin^2(kx-\omega t) \qquad (8)$$

Insatt (8) i (6) ger

$$u_p(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}FA^2k^2}\sin^2(kx-\omega t)$$

jmf. b)

$$\left(v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{1}{2}FA^2\frac{\omega^2}{v^2} = \left\{ v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \right\} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \right)$$

extra) Vad är totala energin transporterad per tidsenhet?

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(K + U) = \{(1) \text{ och } (6)\} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\sin^2(kx-\omega t) + \frac{1}{2}FA^2k^2\sin^2(kx-\omega t)\right)$$

$$= v\left(\mu A^2\omega^2\sin^2(kx-\omega t)\right)$$

dvs. effekten

$$P_{avg} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{avg} = \left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = v\mu A^2\omega^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2$$