Kap 3.1–3.5.
Inversfunktion, arcusfunktioner.

301. (A) Förenkla uttrycken så långt som möjligt

a. $\dfrac{\ln 8}{\ln 2} + \ln 8 - \ln 2 + \ln \dfrac{1}{4}$

b. $\left(\dfrac{\ln 3}{\log_{10} 3} \cdot \log_{10} e + \dfrac{1}{\ln 3 \cdot \log_3 e}\right)^3$

302. (A) Lös ekvationerna

a. $\sqrt{e^x} = e^{\sqrt{x}}$

b. $(\sqrt{e})^x = e^{\sqrt{x}}$

c. $e^{2 - x^2} = e^{-x}$

303. (A) Lös ekvationerna:

a. $\sqrt{\ln (x^2 - 1)} = \sqrt{\ln (x + 1) + \ln (x - 1)}$

b. $\ln (x + 2) + \ln (x + 4) = \ln (2x + 5)$

c. $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

d. $\ln (x + 6) = \ln (x + 2) + \ln x$

e. $\ln (2 - x^2) = \ln (-x)$

304. (A) Beräkna gränsvärdena:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \ln \sqrt{x} + \sin x}{2x - \sqrt{x} \ln x^3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + x^6 + x^{12})e^{-x}$

305. (A) Undersök för vilka x är funktionen $f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$

definierad, respektive kontinuerlig.

306. (A) Bestäm i förekommande fall inversfunktionen $x = x(y)$ till funktionen $y = y(x)$ om y är den funktion som anges nedan. Ifall funktionen saknar invers så ange detta.

a. $y = 2x + 3, -\infty < x < \infty$

b. $y = x^2 , \; x \leq 0$

c. $y = x^2 , \; x \geq 0$

d. $y = x^2 , \; -\infty < x < \infty$

e. $y = \dfrac{2 - x}{3 + x} , \; x \neq -3$

f. $y = \sqrt{1 - x^2} , \; -1 \leq x < 0$

307. (A) Beräkna exakt

a. $\arcsin \frac{1}{2}$

b. $\arccos(-1)$

c. $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

d $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

e. $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$

f. $\arctan\left(\frac{1}{\tan \pi/5}\right)$

g. $\arccos\left(\tan \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right)$

h. $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

Svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner.

308. (A) Beräkna exakt

a. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$

b. $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)$

c. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

d. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$

e. $\tan(\arctan 2)$

f. $\arctan\left(\tan \frac{7\pi}{5}\right)$

g. $\cot(\operatorname{arccot} \sqrt{3})$

h. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$

Svaren får inte innehålla cyklometriska eller trigonometriska funktioner.

309. (A) Beräkna exakt

a. $\cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$

b. $\sin\left(\arccos \frac{7}{9}\right)$

c. $\tan\left(\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\right)$

310. (A) Beräkna exakt

a. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\right)$

b. $\tan\left(\arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arccot}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$

c. $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{3}\right)$

d. $\sin\left(\arctan \frac{4}{3} + \arccos \frac{12}{13}\right)$

311. (A) Förenkla så långt som möjligt:

a. $\arctan(1 + \sqrt{2}) + \arctan(1 - \sqrt{2})$

b. $\arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arccot} \frac{1}{7}$

c. $\arctan 2 + \arctan 3$

d. $\arcsin \frac{3}{5} + \arctan \frac{1}{7}$

e. $2 \arctan \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$

f. $\arccos \frac{11}{14} + \arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$

g. $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$

h. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$

i. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arctan 3$

Svaren får inte innehålla cyklometriska funktioner.

312. (A) Avgör, utan hjälp av räknedosa eller motsvarande, vilket som är det större av de båda talen $\arctan \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3}$ och $\arccos \frac{1}{4}$.

313. (A) Lös ekvationerna:

a. $\arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$

b. $\tan\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = 1$

c. $\cos(2 \arcsin x) = \frac{1}{4} - x^2$

d. $\arccos x + \arcsin(2x + 1) = \frac{\pi}{2}$

e. $\arcsin(4 - x) + \arccos \frac{5}{x} = \frac{\pi}{2}$

f. $\arcsin x + \arccos 2x = \frac{\pi}{6}$

g. $\arcsin(x - 1) + 2 \arccos x = \frac{\pi}{2}$

h. $\arctan 2x^2 = \arcsin x$

i. $\arccos 3x = \arctan 2x$

j. $\arcsin x = 2 \arccos x$

k. $\arccos\left(\frac{10x + 1}{6}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{2x - 1}{2}\right)$

313. l. $\arcsin \frac{x}{2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

m. $\arcsin x + \arcsin (1 - x^2) = \frac{\pi}{2}$

n. $\arccos x^2 + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

o. $2 \arctan x - \arcsin x = \arccos x$

314. (B) Lös ekvationerna:

a. $2 \arcsin x - \arccos 2x = \arccos x$

b. $\arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{2 - x}{2x}$

c. $\arcsin \frac{x}{x + 1} = \arctan \frac{x}{x - 1}$

d. $\arctan x + \arctan \left(1 - \frac{x}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

e. $3 \arccos x = \arccos 3x$

315. (B) Visa att funktionen $f(x) = \arctan (2x + 1) - \arctan \frac{x}{x + 1}$ är konstant i vissa intervall och bestäm konstantens värde i de olika intervallen.

316. (B) Visa att $\arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{d}{c} = \arctan \frac{bc - ad}{ac + bd}$ om $abcd > 0$.

317. (B) För vilka x gäller att $\arctan 2x > \operatorname{arccot} x$?

318. (A) Följande funktioner är ej definierade för $x = 0$. Definiera dem för $x = 0$ så att de är kontinuerliga också i den punkten.

a. $\arctan (\ln |x|)$ b. $x \ln \frac{1}{x^2}$

319. (B) Visa att ekvationen $x + \arctan x = 1$ har exakt en lösning.

320. (A) Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a. $\arcsin x^2$ b. $\arccos \frac{1 - x}{\sqrt{2}}$

c. $\arctan \sqrt{x}$ d. $\arctan \frac{1 + x}{1 - x} - \arctan x$

321. (A) Beräkna höger- och vänsterderivatorna i $x = 0$ till funktionen
$f(x) = \arcsin x + \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

322. (A) Bestäm andraderivatan till funktionen $(1 + x^2) \arctan x$.

Ledningar till uppgifterna 301–322.

301. Använd logaritmlagarna.

a. Använd att $\ln 2^n = n \ln 2$

b. Använd att $\log_a b = \ln b / \ln a$

302. Använd potenslagarna.

a, b. Vänsterleden i de båda ekvationerna är identiska:
$\sqrt{e^x} = e^{x/2} = (\sqrt{e})^x$

303. Använd logaritmlagarna.

a. $\ln a + \ln b = \ln ab$, observera också att x måste väljas så att $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$ och $x^2 - 1 \geq 1$, detta eftersom funktionen $\ln t$ definierad endast då $t > 0$ och funktionen $\sqrt{t}$ endast då $t \geq 0$.

b. Jämför a.

c. $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$

d. Jämför a.

e. $\ln (2 - x^2) = \ln (-x) \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; 2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 2$

Prövning visar att $x = -1$ är en rot till den givna ekvationen, men att $x = 2$ inte är det – argumenten för ln-funktionerna är då negativa!

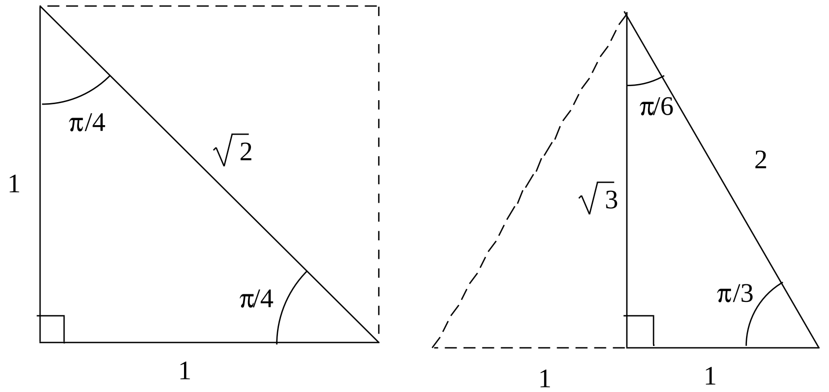
304. a. Förkorta med x, obs. att $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ och att $\ln x^3 = 3 \ln x$. Se sats 5, sid 193

b. Se sats 5, sid 193

305. Tillämpa sats 6 på sid 79 för att visa att funktionen är kontinuerlig då $x \neq 0$. Undersök sedan gränsvärdena $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ och $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$. Se sats 5, sid 193.

306. a.– f. Jämför definition 2 på sid 173.

307. Se definitionenerna på sid 202, 205, 306 och exemplen 1, 2, 3, 7, 9 kap 3.5. Använd relationerna mellan vinklar och sidförhållandena i trianglarna:



I uppgift f: Observera att $1/\tan a = \cot a = \tan(\pi/2 - a)$.

308. Se definitionenerna på sid 202, 205, 306 och exemplen 1, 2, 3, 7, 9 kap 3.5.

309. Se definitionenerna på sid 202, 205, 306 och exemplen 1, 2, 3, 7, 9 kap 3.5. Håll reda på de trigonometriska funktionernas tecken i de olika kvadranterna. Visa t ex genom att betrakta lämpliga trianglar att för $a > 0$ gäller:

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
arcsin a	a	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$
arccos a	$\sqrt{1-a^2}$	a	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
arctan a	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\dfrac{1}{a}$
arccot a	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	a

Dessa samband gäller emellertid också för $a < 0$, vilket kan inses av resonemang av följande slag:

Om $a < 0$ så är $-a = b > 0$ och exempelvis

$\tan(\arcsin a) = \tan(\arcsin(-b)) = \{$ Teckenreglerna för tan och sin $\} =$

$= -\tan(\arcsin b) = \{$ Enligt ovan $\} = -\dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$,

dvs sambandet i tabellen ovan gäller även för dessa a–värden.

310. Använd additionssatserna för sin, cos resp tan och jämför ledningen i föregående uppgift.

311. Beräkna först tan (eller någon annan trigonometrisk funktion) för uttrycken. Använd samma teknik som i den föregående uppgiften för att förenkla dessa uttryck Detta ger att den sökta storheten är en av oändligt många, men glest fördelade tal. Bestäm sedan med någon grov uppskattning av storleken på termerna i det ursprungliga uttrycket vilket av dessa möjliga värden som är det riktiga.

Lösning till a:

Låt $\alpha = \arctan(1+\sqrt{2})$ och $\beta = \arctan(1-\sqrt{2})$. Då är

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} = \frac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})}{1-(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 1.$$

Alltså är $\alpha + \beta = \pi/4 + n\pi$, n något heltal. Eftersom $1+\sqrt{2} > 0$ och $1-\sqrt{2} < 0$ så är $0 < \alpha < \pi/2$ och $-\pi/2 < \beta < 0$.

Av detta följer att $-\pi/2 < \alpha + \beta < \pi/2$, dvs $-\pi/2 < \pi/4 + n\pi < \pi/2$, varav $-3/4 < n < 1/4$. Men n är ett heltal, alltså $n = 0$. Detta ger svaret $\alpha + \beta = \pi/4$.

312. Låt $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$, $\beta = \arcsin\frac{1}{3}$ och $\gamma = \arccos\frac{1}{4}$. Förenkla, med hjälp av tekniken i föregående uppgift, $\tan(\alpha+\beta)$ samt visa att $\tan(\alpha+\beta) < \tan\gamma$. Verifiera sedan att $\alpha+\beta$ och γ är vinklar i första kvadranten och använd att tan-funktionen är strängt växande i det intervallet för att dra slutsatsen att $\alpha + \beta < \gamma$.

313.

a. Använd definitionen av arcsin-funktionen.

b. Sätt $\frac{1}{2}\arcsin x = t$ och bestäm först t ur den givna ekvationen. Notera därvid att $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$. Bestäm sedan x ur ekvationen $\arcsin x = 2t$.

c. Använd att $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

d,e. Använd t ex att $\pi/2 - \arccos x = \arcsin x$.

f. Skriv t ex först om ekvationen enligt $\arccos 2x = \pi/6 - \arcsin x$. Tag sedan cos för båda leden och förenkla till en algebraisk ekvation – man får: $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x$. Lös denna ekvation och pröva rötterna.

g. Ekvationen kan skrivas $2\arccos x = \arccos(x-1)$. Tag cos för båda leden, förenkla, lös ekvationen och pröva rötterna.

h. Tag tan för båda leden, förfar sedan som ovan

313. i. Tag tan för båda leden, förenkla vänster led.

k. Tag cos för båda leden. Förenkla och förfar sedan som ovan. Notera också att $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

l. Ta sin eller tan för båda leden.

m. $\pi/2 - \arcsin x = \arccos x$. Ta sedan sin eller cos för båda leden. (Ett alternativ: Använd att $\arccos x = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$ om $0 \le x \le 1$)

n. Ekvationen kan skrivas $\arccos x^2 = \arccos x$

o. Notera att $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$

314. a. Ekvationen kan med hjälp av sambandet $\arcsin x = \pi/2 - \arccos x$ skrivas $\arccos 2x = \pi - 3\arccos x$. Tag sedan cos för båda leden och använd att $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. (Kan visas genom att via additionssatsen för cos använd på $\cos(2\alpha + \alpha)$). Pröva rötterna till den erhållna ekvationen.

b,c. Tag t ex sin för båda leden, förenkla, lös ekvationen och pröva rötterna.

d Ta t ex tan för båda leden, fortsätt sedan som i c.

e. Ta cos för båda leden. Använd tex att $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Efter förenkling får man ekvationen $2x^3 - 3x = 0$. Prövning visar att ingen av rötterna duger som lösningar till den givna ekvationen.

[*Anmärkning:* Man kan också utnyttja att $\arccos x$ enligt definitionen är avtagande och ≥ 0 och att $\arccos x \ge \pi/2$ då $-1 \le x \le 0$. Man får :
För $x > 0$: $\arccos 3x < \lceil 3x > x \rceil < \arccos x \le 3\arccos x$
För $x \le 0$: $\arccos 3x \le \pi < 3\pi/2 \le 3\arccos x$
(Skissera gärna graferna för $y = \arccos 3x$ och $y = 3\arccos x$).
Under alla omständigheter är alltså $\arccos 3x \ne 3\arccos x$]

315. Använd additionssatsen för tan och förenkla $\tan f(x)$. Man får att $\tan f(x) = 1$. Verifiera sedan att funktionen är definierad och kontinuerlig i intervallen $(-\infty,-1)$ och $(-1,\infty)$. Bestäm konstanterna genom insättning av något lämpligt x-värde i vardera intervallet.

[*Anmärkning*: Uppgiften kan också lösas med hjälp av derivering. Man får efter förenkling $f'(x) = 0$ utom för $x = -1$, då funktionen är odefinierad.]

316. Låt $\arctan \frac{b}{a} = \alpha$ och $\arctan \frac{d}{c} = \beta$. Visa först att $\tan(\alpha - \beta) = \frac{bc - ad}{ac + bd}$. Verifiera sedan att $\frac{b}{a}$ och $\frac{d}{c}$ har samma tecken och att detta har som konsekvens att $-\pi/2 < \alpha - \beta < \pi/2$.

317. Utnyttja att $\arctan 2x$ är en växande och att $\operatorname{arccot} x$ är en avtagande funktion. Bestäm det x för vilket likhet gäller mellan funktionerna.

318. a. $\lim_{x \to 0} \ln |x| = -\infty$ och $\lim_{\tau \to -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}$

b. $x \ln \frac{1}{x^2} = -2\, x \ln |x|$.

319. Obs att funktionen $f(x) = x + \arctan x$ är strängt växande. Notera t ex att $f(0) = 0$ och att $f(1) = 1 + \pi/4$.

320. Deriveringsreglerna finns i kap 3.5.

321. Jämför exempel 4 på sid 105.

Svar till uppgifterna 301–322.

301. a. 3 b. 8

302. a. och b. $x = 0,\ x = 4$
c. $x = -1,\ x = 2$

303. a. Alla $x \geq \sqrt{2}$ b. $x = -1$
c. $x = 1,\ x = e^4$ d. $x = 2$
e. $x = -1$

304. a. 1/2 b. 0

305. Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla reella x.

306. a. $x = \dfrac{y-3}{2},\ -\infty < y < \infty$ b. $x = -\sqrt{y},\ y \geq 0$
c. $x = \sqrt{y},\ y \geq 0$ d. Funktionen saknar invers.
e. $x = \dfrac{2-3y}{1+y},\ y \neq -1$ f. $x = -\sqrt{1-y^2},\ 0 \leq y \leq 1$

307. a. $\dfrac{\pi}{6}$ b. π
c. $-\dfrac{\pi}{6}$ d. $\dfrac{5\pi}{6}$
e. 0 f. $\dfrac{3\pi}{10}$
g. $\dfrac{\pi}{6}$ h. $\dfrac{\pi}{2}$

308. a. $\dfrac{1}{2}$ b. $\dfrac{2\pi}{5}$
c. $-\dfrac{1}{2}$ d. $\dfrac{\pi}{5}$
e. 2 f. $\dfrac{2\pi}{5}$
g. $\sqrt{3}$ h. $\dfrac{3\pi}{5}$

309. a. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c. $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

310. a. $\frac{1}{3}$ b. $-\frac{16}{63}$

c. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ d. $\frac{63}{65}$

311. a. $\frac{\pi}{4}$ b. $\frac{3\pi}{4}$

c. $\frac{3\pi}{4}$ d. $\frac{\pi}{4}$

e. π f. $\frac{\pi}{6}$

g. $\frac{5\pi}{4}$ h. $\frac{3\pi}{4}$

i. π

312. $\arccos\frac{1}{4}$ är det större av talen.

313. a. $\frac{1}{2}$ b. 1

c. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. -1

e. Inga lösningar f. $\frac{1}{2}$

g. $0\ ,\ \frac{1}{2}$ h. $0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

i. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ j. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

k. $\frac{1}{2}$ l. 1

m. 0 , 1 n. 0 , 1

o. 1

314. a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{4}{5}$

c. 0 ; 4 d. 0 ; 7

e. Inga lösningar

315. $f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{då } x > -1 \\ -3\pi/4 & \text{då } x < -1 \end{cases}$

317. $x > 1/\sqrt{2}$

318. a. $-\dfrac{\pi}{2}$ b. 0.

320. a. $\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ b. $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

c. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$ d. 0

321. c. $f\,'_+(0) = 0$; $f\,'_-(0) = 2$

322. a. $\dfrac{2x}{1 + x^2} + 2 \arctan x$