

1. (a) Ekvationen är linjär och av första ordningen. Vi använder integrerandefaktormetoden:

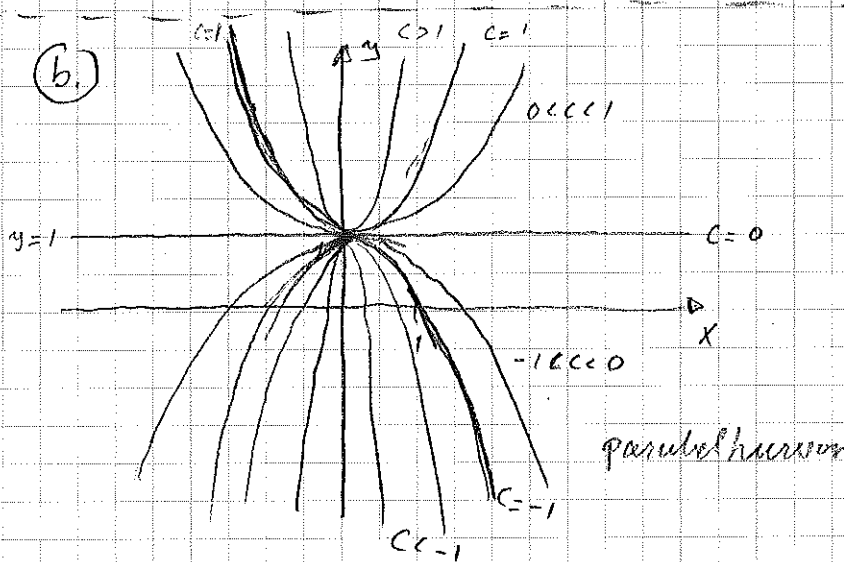
$$xy' - 2y = -2 \Rightarrow y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2}{x};$$

$$\text{Integrerande faktor } e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplikation med denna ger

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = -\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}y\right)' = -\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2} + C \Leftrightarrow y = 1 + Cx^2$$

Svar a: $y = 1 + Cx^2$



$$y(1) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \\ \text{dvs } C = -1$$

Svar b: Lg hör inordnad
och $y = 1 - x^2$

- (c) Samtliga lösningshuvor tangenter linjen $y = 1$ i $(0, 1)$

Alla funktionerna

$$y = \begin{cases} 1 + Cx^2, & x \geq 0, C \text{ konstant,} \\ 1 + Dx^2, & x < 0, D \text{ konstant,} \end{cases}$$

Satisfierar därför ekvationen givet i a-uppgiften

Vadjs $C = -1$ så är $y(1) = 0$ och vadjs $D = 1$ så är $y(-1) = 2$

Svar c: $y = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{då } x \geq 0, \\ 1 + x^2, & \text{då } x < 0, \end{cases}$

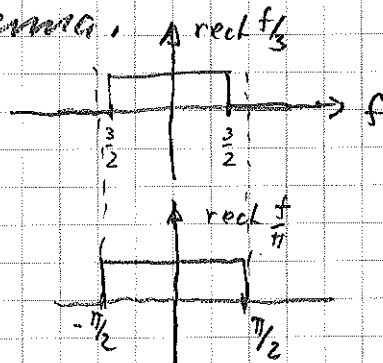
2.

Utsignalen, $y(t)$, ges av faltningen $\text{sinc } 3t * \text{sinc } \pi t$
 För att beräkna denna bestämmer vi först dess
 fouriertransform på så enkel form som möjligt
 och återtransformerar sedan denna.

Man har

$$\text{sinc } 3t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{3} \text{rect} \frac{f}{3}$$

$$\text{sinc } \pi t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{\pi} \text{rect} \frac{f}{\pi}$$



Faltningssatser ger

$$y(t) = \text{sinc } 3t * \text{sinc } \pi t \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{3\pi} \text{rect} \frac{f}{3} \cdot \text{rect} \frac{f}{\pi}$$

$$\text{Men } \text{rect} \frac{f}{3} = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{3}{2} \\ 0, & |f| > \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ och } \text{rect} \frac{f}{\pi} = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & |f| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

eftersom $3 < \pi$ så är därför

$$\text{rect} \frac{f}{3} \cdot \text{rect} \frac{f}{\pi} = \begin{cases} 1, & \text{om } |f| < 3 \\ 0, & \text{om } |f| > 3 \end{cases} = \text{rect} \frac{f}{3}$$

$$\text{Alltså } y(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{3} \text{rect} \frac{f}{3} \right) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} \frac{1}{\pi} \text{sinc } 3t$$

$$\text{Svar: } y(t) = \frac{1}{\pi} \text{sinc } 3t.$$

3.

Ekvationen kan skrivas:

$$y'(t) - \frac{1}{2} t^2 * y(t) = 1, \quad y(0) = 0,$$

där * betecknar Laplacefaltning. Laplace transformering
 ger

$$s Y(s) - \underbrace{y(0)}_{=0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} \cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{dvs } \left(s - \frac{1}{s^3} \right) Y(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\underbrace{s^2 - 1}_{(s-1)(s+1)}} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + 1} = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + 1}$$

3 forh

Återtransformering ger

$$y(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t \quad \left(= \frac{1}{2} (\sin t + \sin t) \right)$$

Svar: $y(t) = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2} \sin t$

4. Variant I (Laplace transformering):

Laplace transformeras systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -13x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = 1$$

för man

$$\begin{cases} s \underline{x}_1(s) - 2 = -3 \underline{x}_1(s) + \underline{x}_2(s) \\ s \underline{x}_2(s) - 1 = -13 \underline{x}_1(s) + \underline{x}_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 13 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -13 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2s-1 \\ s-23 \end{pmatrix},$$

där $\Delta = (s-1)(s+3) + 13 = s^2 + 2s + 10 = (s+1)^2 + 9$

Alltså $\underline{x}_1(s) = \frac{2s-1}{(s+1)^2 + 9} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 3^2} - \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} \xrightarrow{y^{-1}} 2e^{-t} \cos 3t - e^{-t} \sin 3t$

$$\underline{x}_2(s) = \frac{s-23}{(s+1)^2 + 9} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} - \frac{24}{(s+1)^2 + 3^2} = e^{-t} \cos 3t - \frac{24}{3} e^{-t} \sin 3t$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \cos 3t - e^{-t} \sin 3t \\ e^{-t} \cos 3t - 8e^{-t} \sin 3t \end{pmatrix}$

Variant II (Egenvärdesmetoden):

Vi bestämmer först den allmänna lösningen till systemet utan begynnelsevillkor.

Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -13 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3) + 13 = \lambda^2 + 2\lambda + 10 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm 3i$

4 förk.

4.

Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = -1 + 3i$

$$\begin{pmatrix} -2-3i & 1 \\ -13 & 2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -(2+3i)v_1 + v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix};$$

En komplex lösning till systemet är därför:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+3i \end{pmatrix} e^{(-1+3i)t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] e^{-t} (\cos 3t + i \sin 3t)$$

Real- resp. imaginärdelen av denna är också lösningar till systemet, eftersom det är homogent och med reella koefficienter.

$$\text{Re-del: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \sin 3t \right] e^{-t} = \vec{u}_1(t)$$

$$\text{Im-del: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cos 3t \right] e^{-t} = \vec{u}_2(t)$$

Den allmänna lösningen till systemet utgörs därför av

$$\vec{x} = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2$$

Begynnelsevillkoret är uppfyllt om $C_1 \vec{u}_1(0) + C_2 \vec{u}_2(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{dvs. } C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs. } \vec{x} = \left[2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2 \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2 \sin 3t + 3 \cos 3t \end{pmatrix} \right] e^{-t} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} (2 \cos 3t - \sin 3t) \\ e^{-t} (\cos 3t - 8 \sin 3t) \end{pmatrix}. \quad \text{Så här ser svaret ut!}$$

⑤ Variabel I: (Analytisk bearäkning)

①. $x(t) = \sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \text{rect} t = \delta(t + \frac{1}{2}) - \delta(t - \frac{1}{2}) \right]$

$x'(t) = \cos t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} + \sin t \left(\delta(\frac{t}{2\pi} + \frac{1}{2}) - \delta(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}) \right) \cdot \frac{1}{2\pi} =$

$= \left[\frac{1}{2\pi} \delta(\frac{t}{2\pi}) = \delta(t) \right] = \cos t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} + \sin t (\delta(t + \pi) - \delta(t - \pi)) =$

$= \left[y(t) \delta(t-a) = y(a) \delta(t-a) \right] = \cos t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi}$
 $\sin \pi = \sin(-\pi) = 0$

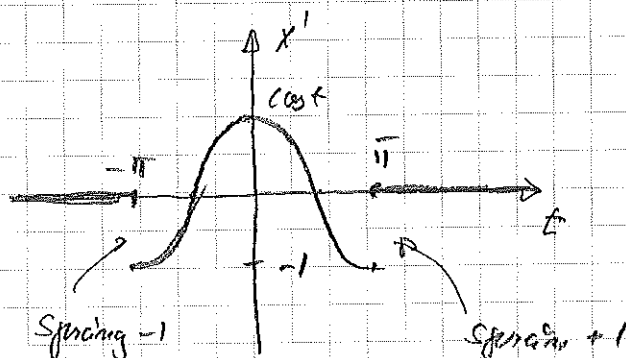
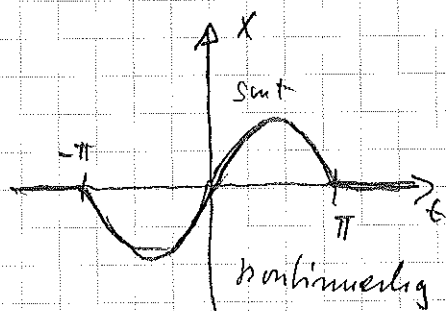
$x'' = -\sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} + \cos t (\delta(t + \pi) - \delta(t - \pi)) = \left[\cos \pi = \cos(-\pi) = -1 \right]$

$= -\sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} - \delta(t + \pi) + \delta(t - \pi)$

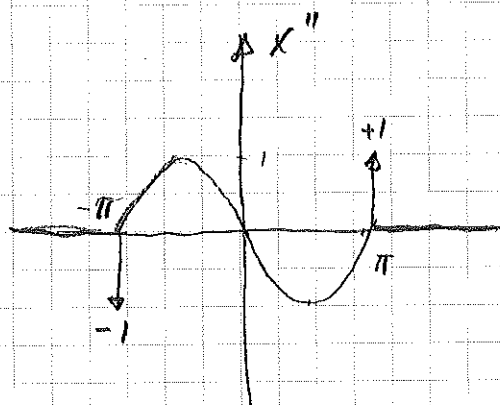
Alltså $x'' + x = \delta(t - \pi) - \delta(t + \pi)$

Svar a: $x' = \cos t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi}$, $x'' = -\sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} + \delta(t - \pi) - \delta(t + \pi)$
 $x'' + x = \delta(t - \pi) - \delta(t + \pi)$

Variabel II: (Bearäkning med hjälp av grafskissning):



$x' = \cos t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi}$



$x'' = -\sin t \cdot \text{rect} \frac{t}{2\pi} + \delta(t - \pi) - \delta(t + \pi)$

Svar som ovan

5 förb.

(b.)

Fouriertransformering av $x'' + x$ ger
med tanke på att $\delta(t-a) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega a}$:

$$(j\omega)^2 \underline{X} + \underline{X} = e^{-j\omega\pi} - e^{j\omega\pi} = -2j \sin \omega\pi$$

$$\text{dus } \underline{X} = \frac{2j \sin \omega\pi}{\omega^2 - 1}; \text{ Svar b:}$$

(c.)

Parsevals relation ut säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Använd på resultatet från b-uppgiften, här vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \omega\pi}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = 2\pi \cdot \pi$$

Men

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \omega\pi}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega &= \left[\omega\pi = t \right] = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{(t^2/\pi^2 - 1)^2} dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \pi^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{(t^2 - \pi^2)^2} dt = \left[\text{Jämn integrand} \right] = 8\pi^3 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{(t^2 - \pi^2)^2} dt = 8\pi^3 I, \end{aligned}$$

där I är den sökta integralen. Alltså $8\pi^3 \cdot I = 2\pi^2$, dus

$$\underline{\text{Svar: } \frac{1}{4\pi}}$$

(6) (a.)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \delta(t - nT) =$$

$$= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{FT} \underline{X}(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) =$$

$$= \left[\underline{X}(f) * \delta(f - \frac{n}{T}) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{X}(f - \frac{n}{T}) = 4000 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{X}(f - 4000n)$$

(dus $Y(f)$ är 4000/4000-periodiska förskjutningen av $\underline{X}(f)$): Svar

6 forts

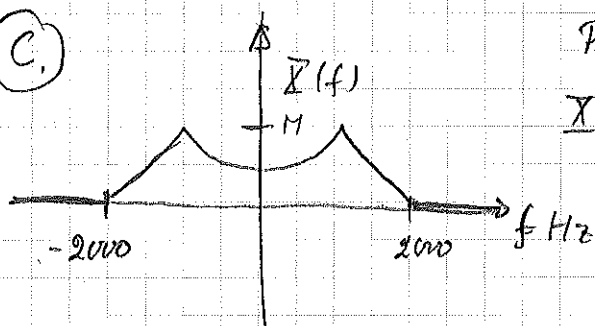
7

b.

$$y(t) = \delta(t - 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-3}) = \delta(t - 3 \cdot 10^{-3})$$

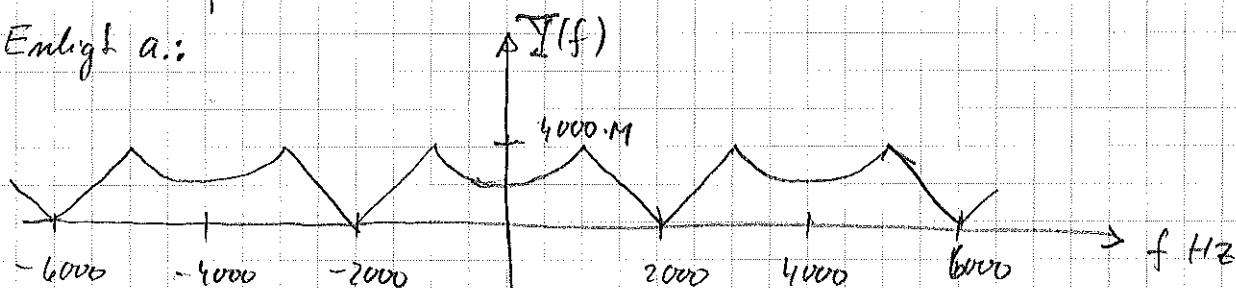
$$\Rightarrow Y(f) = e^{-6\pi \cdot 10^{-3} f} \quad ; \quad \text{Svar b:}$$

c.



Principskiss för
 $X(f)$, bandbreddsgrenslinje till
 $|f| < 2000$.

Enligt a.:



Periodisk fortsättning av $X(f)$ utan överlappning!

$$\Rightarrow \text{För } |f| < 2000 \text{ är } X(f) = \frac{1}{4} \cdot 10^{-3} Y(f); \quad \text{Svar c.}$$

d.

Vi har fått fram att

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} 10^{-3} Y(f), & |f| < 2000 \\ 0 & |f| > 2000 \end{cases} = Y(f) \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \text{rect}\left(\frac{f}{4 \cdot 10^{-3}}\right)$$

Alltså, efter återtransfomerering och med användning av
falkningssatsen:

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) * \text{sinc}(4 \cdot 10^3 t) = \delta(t - 3 \cdot 10^{-3}) * \text{sinc}(4 \cdot 10^3 t) = \\ &= \int \delta(t-a) * z(t) = z(t-a) = \text{sinc}(4 \cdot 10^3 (t - 3 \cdot 10^{-3})) = \\ &= \text{sinc}(4 \cdot 10^3 t - 12) \quad ; \quad \text{Svar d} \end{aligned}$$