(Signaler & system I, ht08: L19, må 13 oktober)

Slutet närmar sig

Lektionen ägnades mest åt exempel på stoffet från förra gången.

Observera att svaret i facit till uppgift ZC2.2.21 inte är riktigt.
Dels tillkommer lösningarna $y(x) = \pm 1$ (som "försvinner" om man inte ser upp när man dividerar med $\sqrt{1-y^2}$ vid variabelseparationen), **dels** är t.ex. $y(x) = \sin\frac{x^2}{2}$ **inte** en lösning då $\sqrt{\pi} < x < \sqrt{3\pi}$ (då är ju $y'(x) < 0$, medan ekvationens HL är > 0). Allmänt är $\sin(\frac{x^2}{2} + C)$ bara lösningar till ekvationen i intervall där derivatan (är 0 eller) har samma tecken som x.
Man får att $\arcsin y = \frac{x^2}{2} + C$, så $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x^2}{2} + C \le \frac{\pi}{2}$
Det finns sex typer av lösningar till ekvationen:

- $y(x) = 1$, alla x
- $y(x) = \begin{cases} 1, & |x| > x_0 \\ \sin\frac{x^2 - x_0^2 + \pi}{2}, & |x| \le x_0 \end{cases}$, där $0 < x_0 < \sqrt{2\pi}$
- $y(x) = \begin{cases} 1, & x \le -x_1 \\ \sin\frac{x^2 - x_1^2 + \pi}{2}, & -x_1 < x < -\sqrt{x_1^2 - 2\pi} \\ -1, & -\sqrt{x_1^2 - 2\pi} \le x \end{cases}$, där $x_1 \ge \sqrt{2\pi}$
- $y(x) = \begin{cases} 1, & x \le -x_1 \\ \sin\frac{x^2 - x_1^2 + \pi}{2}, & -x_1 < x < -\sqrt{x_1^2 - 2\pi} \\ -1, & -\sqrt{x_1^2 - 2\pi} \le x \le \sqrt{x_2^2 - 2\pi} \\ \sin\frac{x^2 - x_2^2 + \pi}{2}, & \sqrt{x_2^2 - 2\pi} < x < x_2 \\ 1, & x_2 \le x \end{cases}$, där $x_1,\ x_2 \ge \sqrt{2\pi}$
- $y(x) = \begin{cases} -1, & x \le \sqrt{x_2^2 - 2\pi} \\ \sin\frac{x^2 - x_2^2 + \pi}{2}, & \sqrt{x_2^2 - 2\pi} < x < x_2 \\ 1, & x_2 \le x \end{cases}$, där $x_2 \ge \sqrt{2\pi}$
- $y(x) = -1$, alla x

Att de konstanta lösningarna kan "skarvas ihop" med de andra beror precis som i exempel 4, sid. 15 i boken, på att $\frac{\partial}{\partial y}$ av HL inte är kontinuerlig då (här) $y = \pm 1$.

Första ordningens linjära ODE, igen

Vi söker alla funktioner $y(x)$ som uppfyller $\boldsymbol{a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)}$,
där $a_1(x)$, $a_0(x)$, $g(x)$ är givna funktioner.
Lösningsmetod:

- Dividera med $a_1(x)$. Det ger $\boldsymbol{y' + P(x)y = f(x)}$ (normalform)
  Se upp med punkter där $a_1(x) = 0$
- Finn den **integrerande faktorn** $\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}}$
- Multiplicera med den, så blir ekvationen $(\mu(x)y)' = \mu(x)f(x)$
- Integrera båda leden.
  Det ger $\boldsymbol{y(x) = e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx}$.
  Glöm inte integrationskonstanten i den sista integralen (i $\mu(x)$ behövs ingen)

En **explicit** lösning (om man kan lösa integralerna).