(Signaler & system I, ht08: L18, to 9 oktober)

Den dubbelsidiga laplacetransformen av $f(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{-st} f(t)\, dt}$.

En **differentialekvation (DE)**:
: en ekvation som innehåller derivator av en eller flera beroende variabler m.a.p. en eller flera oberoende variabler.

Normalform: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Typer:

ordinära (ODE), bara derivator m.a.p. **en** oberoende variabel
partiella (PDE), derivator m.a.p. **två eller flera** oberoende variabler

Ordning: högsta ordningen för ingående derivator

Linjär: linjär i alla **beroende** variabler och deras derivator
(ex. ODE, en beroende variabel:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x))$$

En **lösning** till en n:e ordningens ODE:
en **funktion** $\boldsymbol{\phi(x)}$, med n kontinuerliga derivator,
definierad på ett **intervall** $\boldsymbol{I}$, som uppfyller ekvationen

$\phi(x)$ kan ges **explicit** eller **implicit**

"Typiskt" utgör alla lösningar ("allmänna lösningen") en $\boldsymbol{n}$**-parametrig skara** (+ev. enstaka, **singulära** lösningar)

Begynnelsevärdesproblem (IVP):

$$\begin{cases} \text{ODE } (n\text{:e ordningen}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

där $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ är konstanter.

Sats:

Begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

har en **unik** lösning i något intervall $]x_0 - h, x_0 + h[,\ h > 0$,
om f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är **kontinuerliga** i en omgivning till (x_0, y_0).

Kvalitativa metoder

Riktningsfält

små "tangentbitar", med lutning $f(x, y)$, ritas i punkter i xy–planet.
(Fig. i boken, sid. 36,37,41,42.) Lösningarnas allmänna beteende "syns".

Fasporträtt för **autonoma** ekvationer, $y' = f(y)$ (fig. i boken, sid. 38)

Kritiska punkter, där $\boldsymbol{f(y) = 0}$, ger alla konstanta lösningar till DE.
f:s tecken däremellan visar hur y ändras då x växer.
En kritisk punkt kan vara **asymptotiskt stabil** (en attraktor),
instabil (en repellor) eller **semi–stabil**.

Separabla ekvationer

Om en ODE har formen $y' = g(x)h(y) = \frac{g(x)}{p(y)}$ kan den skrivas

$$\boldsymbol{p(y)y' = g(x)} \quad (\text{eller } p(y)dy = g(x)dx)$$

$\int \ldots dx$ (eller $\int$) ger $\boldsymbol{P(y) = G(x) + C}$, C en godtycklig konstant,
lösningen på **implicit form**. Ibland kan $y = y(x)$ "lösas ut" (eller $x = x(y)$).