

(Signaler & system I, ht08: L16, må 6 oktober)

Fler egenskaper hos laplacetransformer

(Jämför med vad som gäller för fouriertransformer!)

Minns laplacetransformen av en funktion $f(t)$, definierad för $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} (= F(s) = \tilde{f}(s)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

(om integralen är konvergent).

Translationer

För godtyckligt a gäller

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}$$

För $a \geq 0$ gäller

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},$$

$$\text{där } \mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \text{ är Heavisides stegfunktion.}$$

Med den uttrycks enkelt funktioner som är olika definierade i olika intervall.

Derivator av $F(s)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tf(t)\} &= -F'(s), \text{ så} \\ \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n F^{(n)}(s), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Faltningen (eng. convolution) av f och g :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

För alla f, g, h gäller $f * g = g * f$ och $(f * g) * h = f * (g * h)$ och

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

speciellt ($g(t) \equiv 1$)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Volterras integralekvation:

Finn, då $g(t), h(t)$ är kända, $f(t)$ så att

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(u)h(t-u) du, \quad \text{dvs } f = g + f * h.$$

$\mathcal{L}$ -transform ger

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - H(s)}.$$

Periodiska funktioner

Om $f(t+T) = f(t)$, för något $T > 0$ och alla $t \geq 0$, gäller

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$