(Signaler & system I, ht08: L13, må 29 september)

Om variabeln i fouriertransformen

Ibland används "varvsfrekvensen" $f = \frac{\omega}{2\pi}$ i stället för vinkelfrekvensen ω i fouriertransformen. De grundläggande sambanden blir då

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(f) e^{i2\pi ft}\, df \\ \mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft}\, dt \end{cases},$$

dvs man slipper faktorn $\frac{1}{2\pi}$ i syntesekvationen.

En "intressant integral"

Vår tidigare "intressanta summa" motsvaras av

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dt = 2\pi\delta(\omega), \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft}\, dt = \delta(f).$$

e^{imt} och e^{int} (m, n heltal) är ortogonala i $[-\pi, \pi]$, $e^{i\omega t}$ och $e^{i\psi t}$ (ω, ψ reella) är "generaliserat ortogonala" i $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} e^{-int}\, dt = 2\pi\delta_{mn} = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-i\psi t}\, dt = 2\pi\delta(\omega - \psi)$$

Om faltning

Minns att faltningen $(x * y)(t)$ av $x(t)$ och $y(t)$ är linjär i $x(t)$ och $y(t)$,

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau)\, d\tau,$$

$x * y = y * x,\ (x * y) * z = x * (y * z),\ x * \delta = \delta * x = x,\ x(t) * e^{i\omega t} = X(\omega) e^{i\omega t}.$

Viktiga egenskaper för fouriertransformen

(en del blir enklare med f-variabeln, se kompendiet)

Dualitet: (För att gå baklänges i tabell.)

Om $x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} y(\omega)$ så $\boldsymbol{y(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} 2\pi x(-\omega)}$.

Skalning:

Om $x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\omega)$ så $\boldsymbol{x(at) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})}$,

speciellt $\boldsymbol{x(-t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(-\omega)}$

Förskjutning:

$$\boldsymbol{x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{FT}} e^{-i\omega t_0} X(\omega), \quad e^{i\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\omega - \omega_0)}.$$

$\boldsymbol{\delta}$-funktioner:

$$\boldsymbol{\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} 1, \quad 1 \xrightarrow{\mathcal{FT}} 2\pi\delta(\omega)}.$$

Pulståg: (blir pulståg)

$$\boldsymbol{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})}.$$

Derivering:

$$\boldsymbol{x'(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} i\omega X(\omega), \quad tx(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} iX'(\omega)}.$$