(Signaler & system I, ht08: L12, to 25 september)

Poissons summationsformel

Den "intressanta summan" från sist med $\alpha = \frac{t}{T}$ är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{t}{T}} = 2\pi T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n2\pi T).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots x(t)\, dt$ av båda leden ger $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\frac{n}{T}) = 2\pi T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n2\pi T)$.
Speciellt med $T = 1$, $\frac{1}{2\pi}$ fås **Poissons summationsformler**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(2\pi n),$$

där $\widehat{x}(\omega)$ är fouriertransformen av $x(t)$.

Sampling av $x(t)$ i punkterna nT ges av **multiplikation med ett pulståg**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Den ***L*-periodiska fortsättningen** av $y(t)$ ges av **faltning med ett pulståg**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL).$$

Om $y(t)$ är 0 utanför $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, är då dess L-periodiska fortsättning

$$x(t) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL) = y(t) * \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{in\frac{2\pi}{L}(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}t} \cdot \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(\tau) e^{-in\frac{2\pi}{L}\tau}\, d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}t},$$

dvs satsen om fourierserier för L-periodiska funktioner.

Fourierserietransformer

Fourierseriekoefficienterna $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ till en L-periodisk funktion $x(t)$ kan kallas funktionens **fourierserietransform**,

$$x(t) \quad \overset{\mathcal{FS}}{\longmapsto} \quad \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \qquad c_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(t) e^{-in\frac{2\pi}{L}t}\, dt$$

med den **inversa transformen**

$$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad \overset{\mathcal{FS}^{-1}}{\longmapsto} \quad x(t), \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}t}.$$

Informationen i signalen $x(t)$ finns då samlad i den oändliga följden $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
Det gäller då om $x(t) \longmapsto c_n$ att

$$\begin{array}{lll}
x'(t) & \longmapsto & in\frac{2\pi}{L}c_n \\
x(t-a) & \longmapsto & e^{-in\frac{2\pi}{L}a}c_n \\
e^{im\frac{2\pi}{L}t}x(t) & \longmapsto & d_n = c_{n-m} \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nL) & \longmapsto & c_n = \frac{1}{L}
\end{array}$$