

(Signaler & system I, ht08: L11, on 24 september)

Ännu lite mer om generaliserade funktioner

Förra gången såg vi att $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$. Genom att derivera detta, eller genom att använda definitionen av derivatan av en generaliserad funktion, visas att

$$\delta^{(n)}(at) = \frac{\text{sgn}(a)}{a^{n+1}}\delta^{(n)}(t).$$

Speciellt är $\delta^{(n)}(t)$ jämn om n är jämnt, udda om n är udda.

För den generaliserade derivatan $x'(t)$ av $x(t)$ gäller $\widehat{x'}(\omega) = i\omega\widehat{x}(\omega)$. Detta kan (utom för $\omega = 0$) ibland förenkla beräkningen av $\widehat{x}(\omega)$. Ett vanligt fall är att $x(t)$ är definierad intervallvis som polynom (med ändlig maximal grad), då är $x^{(n)}(t)$ för något n en linjärkombination av δ -funktioner och derivator av dem. $\widehat{x^{(n)}}(\omega)$ är då lätt att finna och $\widehat{x}(\omega)$ fås genom att dividera med $(i\omega)^n$. Om $x(t)$ är L -periodisk fås att den n :e koefficienten i fourierserien för $x'(t)$ är $in\frac{2\pi}{L}$ gånger den för $x(t)$.

En intressant summa

Som generaliserade funktioner gäller att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - 2\pi n)$$

och, med $\alpha = 2\pi\beta$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in2\pi\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - n).$$

De dubbelt oändliga summorna skall tolkas som gränsvärdet av de symmetriska summorna: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \cdots$

De generaliserade funktionerna i HL:en kallas **pulståg**.