

Mer om generaliserade funktioner

Vi kan tänka på (och definiera) δ -funktionen på (åtminstone) två sätt:

1. Som ett ”gränsvärde” då $a \rightarrow 0+$ av $\frac{1}{a}\varphi(\frac{t}{a})$,
där $\varphi(t)$ är 0 utanför ett begränsat intervall och $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$.
2. Som något med egenskapen $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t) dt = x(0)$,
för alla tillräckligt snälla $x(t)$ (testfunktioner).

Om man preciserar mängden av testfunktioner kan allmänt en generaliserad funktion $f(t)$ **definieras** som en **linjär** (som förut) och **kontinuerlig** (dvs en ”liten” ändring av $x(t)$ ger en liten ändring av talet) avbildning av testfunktioner till tal, skrivet

$$x(t) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t) dt.$$

(Ett lämpligt val av testfunktioner kan vara alla oändligt deriverbara funktioner $x(t)$ så att $t^m x^{(n)}(t)$ för alla naturliga tal m, n är begränsade funktioner av t . Exempel på sådana funktioner är $\text{polynom}(t) \cdot e^{-t^2}$.)

Olika operationer på generaliserade funktioner kan då definieras med hjälp av egenskaper för vanliga funktioner, t.ex.

$$\mathbf{f}(t - a) \text{ ges av } \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t + a) dt,$$

$$\mathbf{f}(-t) \text{ ges av } \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(-t) dt,$$

$$\mathbf{f}(at) \text{ ges (då } a \neq 0) \text{ av } \int_{-\infty}^{\infty} f(at)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{|a|}x(\frac{t}{a}) dt,$$

$$\widehat{\mathbf{f}}(\omega) \text{ ges av } \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{x}(t) dt,$$

$$\mathbf{f}'(t) \text{ ges av } \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x'(t) dt.$$

Varje HL ger ju en känd (linjär och kontinuerlig) avbildning av testfunktioner, dvs en ny generaliserad funktion.

Sista raden visar speciellt att **varje generaliserad funktion kan deriveras (hur många gånger som helst)!**

För δ -funktionen får man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)x(t) dt = x(a),$$

$$\delta(-t) = \delta(t),$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0,$$

$$\widehat{\delta}(\omega) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t) dt = -x'(0), \text{ så } \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)x(t) dt = (-1)^n x^{(n)}(0).$$

$$\mathbf{H}'(t) = \delta(t), \text{ där } H(t)(= u(t) = \theta(t)) \text{ är Heavisides stegfunktion.}$$

Om $f(t)$ är en vanlig funktion (som inte växer för snabbt då $t \rightarrow \pm\infty$ och) som är deriverbar utom i isolerade punkter $a_1, a_2, \dots$, där den har språng $d_1, d_2, \dots$, kan $f(t)$ ses som en generaliserad funktion och dess derivata (en generaliserad funktion) kallas den **generaliserade derivatan** av $f(t)$:

$$f'(t) = \{f'(t)\} + \sum_k d_k \delta(t - a_k),$$

där $\{f'(t)\}$ är den klassiska derivatan (odefinierad i punkterna $a_1, a_2, \dots$).